نظری علم الحیل

سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نظری علم الحیل

تصنیف

جے۔ ایچ۔ جینس ایم۔ اے، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعہ عثمانیہ

سنہ ۱۳۵۷ھ م سنہ ۱۳۴۷ف م سنہ ۱۹۳۸ء

دار الطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

"یہ کتاب پروفیسر سرجے۔ ایچ جینس، مصنف اور مسرز جن اینڈ کمپنی، بوسٹن
(یو۔ ایس۔ اے۔) ناشرین کی اجازت سے ترجمہ کرکے شائع کیگئی ہے۔
مصنف کتاب اور ناشرین کتاب نے یہ اجازت بلامعاوضہ بخوشی عطا کی۔
ایسی علم دوستی قابلِ قدر اور قابل شکریہ ہے۔"

فہرست مضامین

نظری علم الحیل

مضمون | صفحہ

مضمون	صفحہ
چھٹا باب - مرکز ثقل	۱۷۱
پیترے کا مرکز ثقل	۱۷۶
مرکز ثقل تکمل سے معلوم کرنا	۱۷۹
اُن رقبوں اور حجموں کے مرکز ثقل جو راست تکمل سے حاصل ہوں	۱۹۵
ساتواں باب - کام	۲۰۹
پیمائش اور اکائیاں	۲۰۹
متغیر قوت کے خلاف کام	۲۱۳
لچکدار ڈوری کو تنانے میں کام	۲۱۴
کام کو رقبہ کے ذریعہ تعبیر کرنا	۲۱۶
موہوم کام کا اصول	۲۲۴
توانائی بالقوہ	۲۳۶
توانائی بالحرکت	۳۴۳
توانائی کا بقا	۲۴۸
قائم اور غیر قائم توازن	۲۵۲
آٹھواں باب - مستقل قوتوں کے تحت ذرہ کی حرکت	۲۷۲
جسم جو جاذبہ کے تحت گرے	۲۷۴
مائل مُستوی پر حرکت	۲۷۸
ایٹوڈ کی مشین	۲۸۳
متحرک فریم کے حوالے سے حرکت	۲۸۵
متحرک اجسام کے درمیان رگڑ کے تعاملات	۲۹۰

مضمون	صفحہ

۷۸۶

نظری علم الحیل

پہلا باب

سکون اور حرکت

تمہید

۱۔ فطرت کی یکسانیت ۔ اگر ہم پانی میں ایک پتھر چھوڑیں تو وہ تہ تک ڈوب جائے گا، اگر ہم پانی میں ایک کاگ چھوڑیں تو وہ پانی کی سطح تک اٹھ آئے گا۔ یہ دو بیانات نہ صرف اُن پتھروں اور کاگوں کے لیے درست تسلیم کیے جائیں گے جو ڈوبتے یا تیرتے دیکھے گئے ہیں بلکہ تمام پتھروں اور کاگوں کے لیے۔ اگر ہمارے پاس ایک پتھر کا ٹکڑا ہو جو کبھی پانی میں نہ ڈالا گیا ہو تو ہمیں یقین ہوتا ہے کہ اگر ہم اُسے پانی میں چھوڑینگے تو وہ پانی میں ڈوبیگا۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ہمیں یہ فرض کرنے کا کیا حق حاصل ہے کہ یہ نیا اور ناآزمودہ پتھر کا ٹکڑا پانی میں ڈوبیگا۔ ہم جانتے ہیں کہ لاکھوں

پتھر کے ٹکڑے مختلف اوقات پانی میں ڈالے جا چکے ہیں، ہم جانتے ہیں کہ ان میں ایک بھی ایسا نہ نکلا جو نہ ڈوبا ہو۔ اس سے ہم یہ مستنبط کرتے ہیں کہ فطرت تمام پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ یکساں سلوک کرتی ہے جبکہ وہ پانی میں ڈالے جاتے ہیں اور اس لیے ہمیں یقین ہوتا ہے کہ ایک نئے اور نا آزمودہ پتھر کے ٹکڑے کے ساتھ بھی قوائے فطرت وہی سلوک کریں گی جو وہ بے شمار پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ کرتی دیکھی گئی ہیں اور اس لیے وہ پانی میں ڈوبے گا۔ یہ اصول فطرت کی یکسانیت کے طور پر مشہور ہے، جب یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ قوائے فطرت نے فلاں کام ایک بار کیا ہے تو اُن ہی حالات کے تحت پھر وہ وہی کام کریں گی۔

۲ ۔ قوانین فطرت ۔ وہ اُصول جو اوپر مذکور ہوا یہ کہنے کے مرادف ہے کہ قوائے فطرت کا عمل بعض قوانین کے تحت ہوتا ہے، اِن قوانین کو ہم قوانین فطرت کہتے ہیں۔ مثلاً اگر یہ معلوم ہو چکا ہو کہ ہر پتھر جو کبھی پانی میں ڈالا جا چکا ہے پانی میں ڈوبا ہے تو جیسا کہ ہم پہلے کہہ چکے ہیں
(۲) فطرت کی یکسانیت کا اُصول اس مفروض کی رہبری کرتا ہے کہ ہر پتھر جو آئندہ کبھی پانی میں ڈالا جائے گا تہ تک ڈوبے گا اور پھر ہم قانون فطرت کے طور پر اس کا اِعلان کر سکتے ہیں کہ ہر پتھر جو پانی میں ڈالا جائے تہ تک ڈوبے گا۔

سائنس کا وہ حصہ جس میں قوانین فطرت سے بحث کی جاتی ہے علم الفطرت (Natural Science) کہلاتا ہے۔ یہ دو حصوں میں منقسم ہے ایک تجربی اور دوسرا نظری۔ تجربی سائنس میں قوانین فطرت کی جستجو وقتاً فوقتاً قوائے فطرت کے عمل کا مشاہدہ کرنے سے کی جاتی ہے۔ نظری سائنس میں اُن قوانین فطرت کو جو تجربی سائنس نے دریافت کئے ہیں مواد کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے، ممکن ہو تو اِن قوانین فطرت کو سادہ تر شکلوں میں تحویل کیا جاتا ہے، اور پھر یہ معلوم کیا جاتا ہے کہ اِن قوانین سے کیونکر

پیشین گوئی ہو سکتی ہے کہ قوائے فطرت کا عمل اُن صورتوں میں کیا ہوگا جو تجربہ کی کسوٹی پر فی الواقع آزمائے نہیں گئے ہیں۔ مثلاً تجربی سائنس سے معلوم ہوتا ہے کہ پتھر ڈوبتا ہے، کاگ تیرتا ہے، اور علیٰ ہذا متعدد متشابہ قوانین۔ اِن قوانین کی مدد سے نظری سائنس میں وہ سادہ قوانین فطرت ماخوذ ہوتے ہیں جو ڈوبنے یا تیرنے کے تمام مظاہر پر حکمران ہیں اور پھر ایک قدم آگے بڑھنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اِن قوانین کی مدد سے ہم کس طرح تجربہ کو فی الواقعی عمل میں لانے سے پیشتر پیشین گوئی کر سکتے ہیں کہ ایک دی ہوئی شئے ڈوبے گی یا تیرے گی۔ مثلاً تجربی سائنس یہ دریافت نہیں کر سکتی کہ آیا پچاس ہزار ٹن کا ایک جہاز تیرے گا یا ڈوبے گا کیونکہ پچاس ہزار ٹن کا کوئی جہاز موجود نہیں ہے جس سے تجربہ کیا جائے۔ لیکن بحری معمار فطرت کی یکسانیت کے بھروسہ تجربی سائنس سے معلوم شدہ قوانین فطرت کی بناء پر اور اِن قوانین کو استعمال کرنے کے اُس طریقہ سے جو نظری سائنس سے معلوم ہو پچاس ہزار ٹن کا ایک جہاز بنا سکتا ہے پورے اعتماد کے ساتھ کہ وہ اُسی طریقہ پر پیش آئے گا جس کی پیشین گوئی نظری سائنس نے کی ہے۔

۳۔ علم الحیل۔ سائنس کی اُس شاخ میں جو علم الحیل کے طور پر معروف ہے اجسام کی حرکت پر اور اُن قوائے فطرت پر بحث کی جاتی ہے جو اِس حرکت کا سبب ہوتی ہیں یا حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں۔ وہ قوانین فطرت جو اِن قوتوں کے عمل اور اجسام کی حرکت پر حاوی ہیں مدت سے معلوم ہیں اور نیوٹن انہیں سادہ ترین شکل میں تحویل کر چکا ہے۔ اِس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ **تجربی علم الحیل** سائنس کی ایک تکمیل یافتہ شاخ ہے۔

اِس کتاب میں **نظری علم الحیل** سے بحث کی جائے گی۔ ہم اُن قوانین سے ابتدا کریں گے جو تجربی علم الحیل نے مہیا کئے ہیں اور

پھر اس پر بحث کریں گے کہ اِن قوانین کو اجسام کی حرکت کے متعلق پیشین گوئی کرنے میں کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے، مثلاً زمین پر اجسام کا گرنا، مرمیوں کا پھینکنا، سورج کے گرد زمین کی اور سیاروں کی حرکت وغیرہ۔ سوالات کی ایک اہم جماعت جن پر ہمیں بحث کرنی ہوگی وہ ہونگے جن میں کوئی حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی کیونکہ قوائے فطرت جو حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ کوئی حرکت واقع نہیں ہوتی۔ ایسے مسئلوں کو سکونیاتی کہا جاتا ہے۔

ایک نقطہ کی حرکت

۴ — سکون کی حالت۔ کسی جسم کی حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر یہ متعین کرنا ضروری ہے کہ کسی جسم کے سکون سے کیا مراد ہے معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ ٹرین ساکن ہے جبکہ وہ پٹڑیوں پر حرکت نہ کر رہی ہو۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ ٹرین، زمین کے بقیہ حصہ کے اشتراک میں فی الواقعی ساکن نہیں ہے بلکہ سورج کے گرد ایک بڑی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ اسی طرح ایک مکھی جو ریل کے ڈبہ کی دیوار پر رینگ رہی ہو ایک لحاظ سے ساکن کہی جا سکتی ہے جبکہ وہ دیوار کے ایک ہی مقام پر ٹھہری رہے۔ لیکن مکھی فی الواقعی ساکن نہیں ہوگی، وہ دیہات میں ٹرین کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لے گی، دیہات سورج کے گرد زمین کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لیں گے، اور سورج فضا میں نظام شمسی کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لے گا۔

یہ مثالیں اِس امر کی متقاضی ہیں کہ سکون اور حرکت کے تصورات کو صاف، صریح اور ٹھیک معنے دیے جائیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ہمارے بیانات کافی ٹھیک ہوتے اگر ہم پہلی صورت میں کہتے کہ ٹرین زمین کے لحاظ سے ساکن تھی اور دوسری صورت میں کہتے کہ مکھی ڈبہ کے

لحاظ سے ساکن تھی۔

۵۔ حوالے کا فریم۔ پس سکون اور حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر یہ ضروری معلوم ہوتا ہے کہ حوالے کے فریم کے تصور کا اضافہ کیا جائے۔ زمین نے ٹرین کی حرکت کے لیے حوالہ کا ایک فریم مہیا کیا اور جب ٹرین پٹڑیوں پر حرکت نہ کر رہی ہو تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ٹرین ساکن ہے جبکہ زمین کو حوالے کے فریم کے طور پر لیا گیا ہو۔ اسی طرح (۴) ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ مکھی ساکن تھی جبکہ ڈبہ کو حوالے کا فریم لیا گیا ہو۔ صریحاً کوئی فریم کاری حقیقی یا خیالی یا کوئی مادی جسم حوالے کے فریم کے طور پر لیا جا سکتا ہے بشرطیکہ وہ استوار ہو یعنی وہ خود اپنی شکل اور جسامت نہ بدل رہا ہو۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک نقطہ بلحاظ کسی حوالے کے فریم کے ساکن ہے جبکہ اس نقطہ کا فاصلہ حوالے کے فریم کے ہر نقطہ سے غیر متبدل رہے۔

۶۔ حوالے کے فریم کے لحاظ سے حرکت۔ حوالے کے فریم کے تصور کو واضح کر دینے کے بعد اس کے لحاظ سے ہم نہ صرف سکون پر بحث کر سکتے ہیں بلکہ حرکت پر بھی۔ جب ٹرین پٹڑیوں پر ایک میل حرکت کر لیتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ٹرین اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی زمین کے لحاظ سے ایک میل حرکت کر چکی ہے۔ جب مکھی ڈبہ کے فرش سے چھت تک رینگ جاتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی ڈبہ کے لحاظ سے آٹھ فٹ (مثلاً) حرکت کر چکی ہے۔

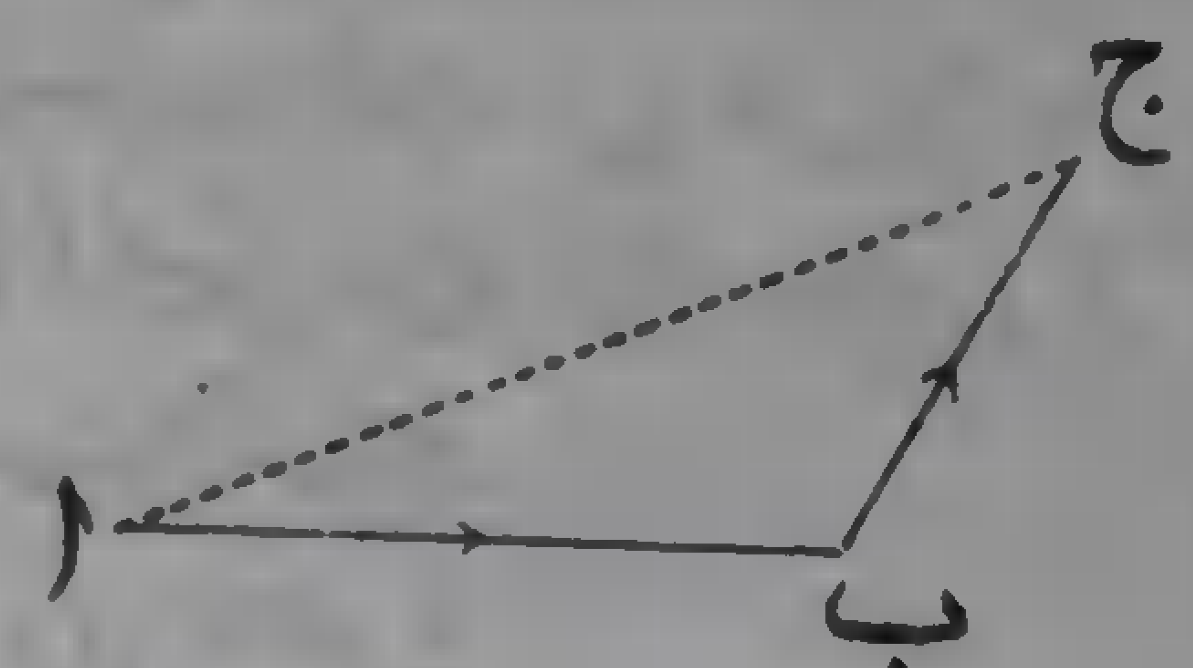
دو لمحات t_1، t_2 کے درمیانی وقفہ میں ٹرین کے لحاظ سے مکھی نے جو فاصلہ طے کیا ہے اسے مقرر کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ وہ حقیقی نقطہ جہاں سے

مکھی چلی ہے ٹرین کے موجودہ محل سے (فرض کرو) ایک میل پیچھے ہے لیکن وہ نقطہ جہاں سے ہم پیمائش کرتے ہیں وہ نقطہ ہے جو ڈبہ میں وقت ت$_{۲}$ پر اُسی جگہ ہے جس جگہ وہ وقت ت$_{۱}$ پر تھا۔ اِس لیے بالعموم ایک دئے ہوئے حوالے کے فریم کے لحاظ سے اوقات ت$_{۱}$ اور ت$_{۲}$ کے درمیانی وقفہ میں طے شدہ فاصلہ مقرر کرنے میں ہم اول وہ نقطہ ا معلوم کرتے ہیں جو وقت ت$_{۲}$ پر حوالے کے فریم کے لحاظ سے اُسی محل میں قائم رہتا ہے جس میں وہ نقطہ جہاں سے متحرک نقطہ وقت ت$_{۱}$ پر چلا ہے قائم تھا۔ اِس نقطہ ا سے نقطہ ب تک جس پر متحرک نقطہ وقت ت$_{۲}$ پر پہنچا ہے وہ فاصلہ ہوگا جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے طے ہوا ہے۔

ایک ذرہ ا کے لحاظ سے کسی ذرہ ب کی حرکت سے اِس کی وہ حرکت مراد ہے جو ا کے ساتھ حرکت کرنے والے حوالے ایک فریم کے لحاظ سے معلوم کی گئی ہو۔

حرکتوں کی ترکیب ۔ فرض کرو کہ ایک دئے ہوئے وقت میں متحرک نقطہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے ایک خاص فاصلہ طے کرتا ہے اور اِس اثناء میں حوالے کا یہ فریم خود ایک دوسرے حوالے کے فریم کے لحاظ سے کوئی اور فاصلہ طے کرتا ہے، چنانچہ ایسی صورت واقع ہو گی اگر مکھی ڈبہ کی دیوار پر چڑھے اور اِس اثناء میں ڈبہ خود زمین کے لحاظ سے حرکت کرے۔

فرض کرو کہ اِس کاغذ کے مستوی میں جس پر شکل (۱) کھینچی گئی ہے
(۵) حوالے کا ایک فریم حرکت کر رہا ہے اور کاغذ خود حوالے کا دوسرا فریم ہے۔ فرض کرو کہ متحرک نقطہ ا سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور اثنائے حرکت میں حوالے کے پہلے فریم کا وہ نقطہ جو ابتداءً متحرک نقطہ پر منطبق تھا ا سے ب تک حرکت کر چکا ہے اور اِس اثناء میں متحرک نقطے نے ج تک حرکت کی ہے۔ اب خط اب،

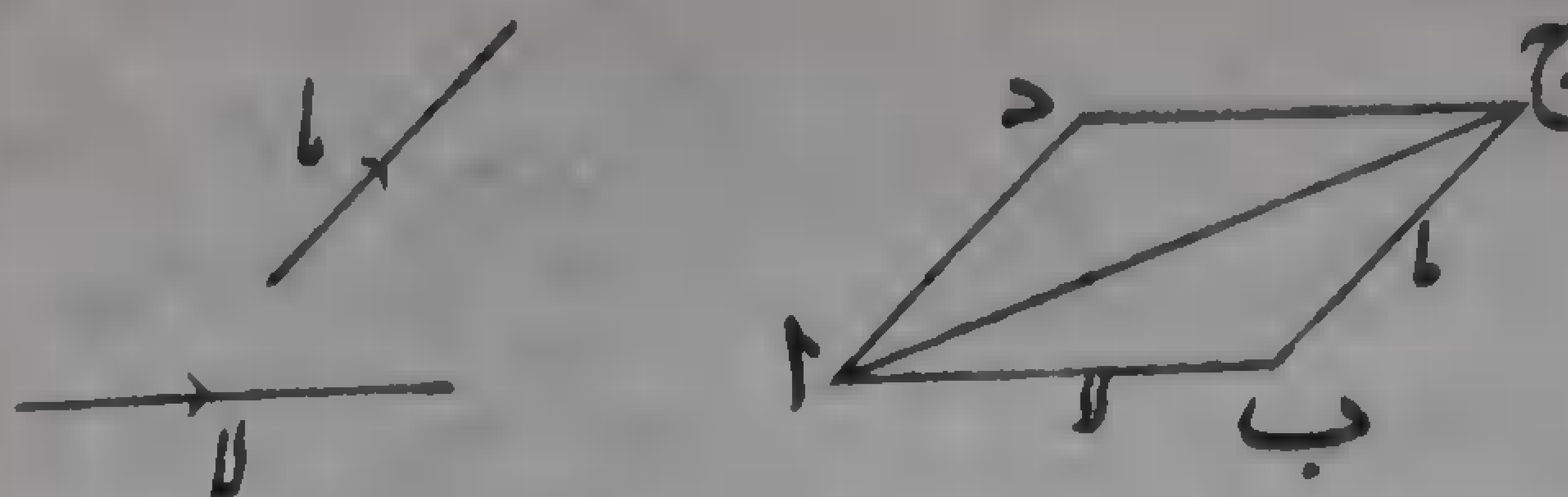


شکل (۱)

فریم ۲ کے لحاظ سے فریم ا کی حرکت کو تعبیر کرتا ہے اور ب ج فریم ا کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت کو تعبیر کرتا ہے۔ متحرک نقطہ کی کُل حرکت بلحاظ فریم ۲ کے ا ج سے تعبیر ہوتی ہے۔ حرکت ا ج کو دو حرکتوں ا ب، ب ج کا مرکب یا اِن دو حرکتوں کا حاصل کہتے ہیں۔ پس اگر ایک نقطہ فریم ا کے لحاظ سے فاصلہ ب ج طے کرے اور اس اثنا میں فریم ا فریم ۲ کے لحاظ سے فاصلہ ا ب طے کرے تو نقطہ کی حاصل حرکت بلحاظ فریم ۲ کے فاصلہ ا ج کے مساوی ہوگی جو دو فاصلوں ا ب، ب ج کو لیکر انہیں اس طریقہ سے رکھنے سے حاصل ہوتی ہے کہ نقطہ ب جس پر ایک فاصلہ ختم ہوتا ہے وہی نقطہ ہوتا ہے جس پر دوسرا فاصلہ ابتدا کرتا ہے۔

دو حرکتوں کو مرکب کرنے کا ایک اور طریقہ ہے۔ فرض کرو کہ لا، ما سے دو حرکتیں تعبیر ہوتی ہیں۔ محصلہ بالا قاعدہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ہمیں ایک مثلث ا ب ج بنانا چاہیئے جس کے اضلاع ا ب ب ج طول میں لا، ما کے مساوی ہوں تو مطلوبہ حرکت ا ج کے مساوی ہوگی۔ ایسا ایک مثلث ا ب ج بنا لینے کے بعد فرض کرو کہ ہم مثلث کے اضلاع کے متوازی خطوط ا د، ج د کھینچ کر متوازی الاضلاع

اب ج د کی تکمیل کرتے ہیں۔ اب چونکہ اد، ب ج کے مساوی ہے اِس لئے وہ بھی حرکت ما کو تعبیر کرے گا اور اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وہ دو اضلاع جو ا پر



شکل (۲)

ملتے ہیں دی ہوئی حرکتوں کو تعبیر کرتے ہیں اور وتر ا ج جو ا میں سے گذرتا ہے حاصل حرکت کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے دو حرکتوں لا، ما کو مرکب کرنے کے لیے حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:

ایک متوازی الاضلاع اب ج د بناؤ ایسا کہ اضلاع اب، اد جو (۶)
ا پر ملتے ہیں دی ہوئی دو حرکتوں لا، ما کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کریں تو وتر ا ج جو ا میں سے گذرتا ہے اُس حاصل حرکت کو تعبیر کریگا جو اِن دو حرکتوں کو مرکب کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

رفتار

۸ ـــ یکساں اور متغیر رفتار۔ رفتار سے مُراد صرف حرکت کی شرح ہے۔ وہ یا یکساں ہو گی یا متغیر۔ اگر ایک نقطہ اس طریقہ سے حرکت کرے کہ اس کی حرکت کے ہر ثانیہ میں خواہ منتخبہ ثانیہ کوئی ہو مرتسمہ فاصلہ ا فٹ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی رفتار، ا فٹ فی ثانیہ کی ایک **یکساں** رفتار ہے۔ لیکن اگر نقطہ ایک ثانیہ میں ا فٹ حرکت کرے، دوسرے ثانیہ میں ب فٹ حرکت کرے اور تیسرے میں

ج فٹ اور علیٰ ہذا تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ ا ب ، ج میں سے کسی سے رفتار کی پیمائش ہوتی ہے ۔ اس صورت میں رفتار کو متغیر کہا جاتا ہے کیونکہ وہ حرکت کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوتی ہے ۔ کسی لمحہ پر رفتار معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کا ایک صغیر وقفہ فرت لیتے ہیں اور فاصلہ فرس کی پیمائش کرتے ہیں جو اس وقفہ میں مرتسم ہوا ہے ۔ اب ہم نسبت $\frac{فرس}{فرت}$ کو اس لمحہ پر کی رفتار کہتے ہیں جب پر وقفہ فرت لیا گیا ہے ۔ اگر رفتار ایکساں ہے تو $\frac{فرس}{فرت}$ وہ فاصلہ ہوگا جو اکائی وقت میں مرتسم ہوتا ہے اور اس لیے رفتار کی موجودہ تعریف وہی ہو جاتی ہے جو اوپر بیان کی جا چکی ہے ۔

اوسط رفتار ۔ اگر کوئی نقطہ متغیر رفتار سے حرکت کرے اور ت ثانیوں میں ا فٹ فاصلہ مرتسم کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وقت ت میں متحرک نقطہ کی "اوسط رفتار" $\frac{ا}{ت}$ ہے ۔ یہ اوسط رفتار وہ رفتار ہے جو ایک خیالی نقطہ کی ہوگی جو ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور وقت ت میں وہی فاصلہ طے کرتا ہے جو حقیقی نقطہ متغیر رفتار سے طے کرتا ہے ۔

اکائیاں ۔ رفتار کی پیمائش میں طول کی ایک اکائی اور وقت کی ایک اکائی کی ضرورت ہے ، مثلاً جب ہم کہتے ہیں کہ ایک نقطہ ا فٹ فی ثانیہ کی رفتار رکھتا ہے تو گویا ہم نے فٹ کو طول کی اکائی اور ثانیہ کو وقت کی اکائی منتخب کیا ہے ۔ ہم اسی رفتار کی مقدار کو دوسری اکائیوں میں ایک سادہ تناسب کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں ۔ (۷)

مثالاً فرض کرو کہ ا فٹ فی ثانیہ کی رفتار کو میلوں اور گھنٹوں کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے ۔

نقطہ ایک ثانیہ میں ۱ فٹ حرکت کرتا ہے اور اس لیے ایک گھنٹہ میں
۱ × ۶۰ × ۶۰ فٹ حرکت کریگا اور اس لیے ایک گھنٹہ میں

$$\frac{۱ \times ۶۰ \times ۶۰}{۱۷۶۰ \times ۳} = \frac{۱۱۵}{۲۲} \text{ میل}$$

حرکت کرے گا۔ پس نقطہ کی رفتار $\frac{۱۱۵}{۲۲}$ میل فی گھنٹہ ہے۔

مثالیں

۱ — ایک ریل گاڑی ۱۸ گھنٹوں میں ۹۱۸ میل کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اس کی اوسط رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو۔

۲ — ایک ٹرین اور ایک موٹر کی رفتاروں کا مقابلہ کرو جبکہ اول الذکر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ طے کرے اور ثانی الذکر ۱۵۰۰ گز فی دقیقہ۔

۳ — ایک آدمی $۹\frac{۴}{۵}$ ثانیوں میں ۱۰۰ گز دوڑتا ہے۔ اس کی اوسط چال میلوں میں فی گھنٹہ کیا ہے۔

۴ — ایک شہری گھڑی کی دو سوئیاں ۱۰ اور ۷ فٹ لمبی ہیں۔ ان کے سروں کی رفتاریں معلوم کرو۔

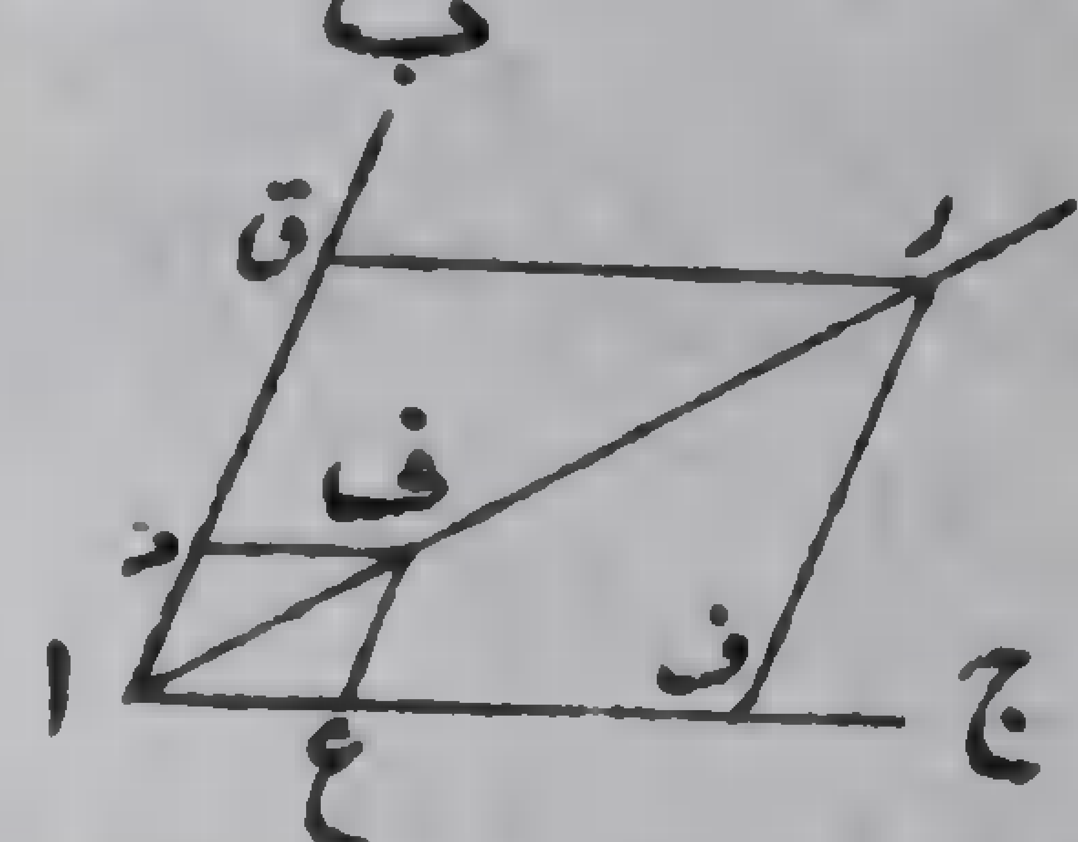
۵ — زمین کے قطر کو ۷۹۲۷ میل لیکر معلوم کرو کہ اس آدمی کی رفتار فٹ ثانیہ اکائیوں میں کیا ہوگی جو خط استوا پر کھڑا ہے (زمین کے محور کے گرد زمین کی یومی گردش کی وجہ سے)۔

۶ — دو گاڑیاں، علی الترتیب ۲۳۰ اور ۴۴۰ فٹ لمبی، متوازی راستوں پر ایک دوسرے سے گذر جاتی ہیں، پہلی گاڑی دوسری سے دو چند رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ چھوٹی گاڑی کا ایک مسافر دیکھتا ہے کہ لمبی گاڑی اس سے تین ثانیوں میں گذر جاتی ہے۔ دونوں گاڑیوں کی رفتاریں معلوم کرو۔

۹ — رفتاروں کی ترکیب — تمام حرکتیں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں

حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کی جانی چاہئیں۔ پس رفتار یعنی حرکت کی شرح کو بھی حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنا چاہئے۔ ایک نقطہ حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے ایک خاص رفتار رکھ سکتا ہے اور خود حوالے کا فریم ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے ایک دوسری رفتار رکھ سکتا ہے۔ اب اگر متحرک نقطہ کی رفتار دوسرے فریم کے لحاظ سے معلوم کرنی ہو تو اس عمل کو دو رفتاروں کو مرکب کرنے کا عمل کہتے ہیں۔

اس غرض کے لیے ہم ان حرکتوں پر غور کرتے ہیں جو وقت کے ایک
ایک صغیر وقفہ فرت میں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ پہلے فریم
کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی رفتار سمت اب میں و$_1$ ہے اور دوسرے
فریم کے لحاظ سے پہلے فریم کی رفتار سمت اج میں و$_2$ ہے۔ پس
متحرک نقطہ پہلے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں اب پر (۸)
فاصلہ و$_1$ فرت (فرض کرو اد) طے کرتا ہے اور اس اثناء میں خود
فریم دوسرے فریم کے لحاظ سے اج پر فاصلہ و$_2$ فرت (فرض کرو
اع) طے کرتا ہے۔



شکل (۳)

فرض کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا وتر اف ہے جس کے دو کنارے اد، اع ہیں، تو نقطہ کی حاصل حرکت دوسرے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں اف ہوگی۔ اب چونکہ متحرک نقطہ وقت فرت میں فاصلہ اف مرتسم کرتا ہے اس لیے حاصل رفتار $\frac{اف}{فرت}$ ہوگی۔

اب فرض کرو کہ ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ رفتاریں خطوط مستقیم سے تعبیر ہوں گی، خط کی سمت رفتار کی سمت کے متوازی ہوگی اور اس کا طول رفتار کی مقدار کے متناسب لیا جائے گا، خطوں کے طول کسی پیمانہ کی بموجب کھینچے جا سکتے ہیں مثلاً ہم طول کے ہر انچ سے ایک فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر کر سکتے ہیں چنانچہ ایسی صورت میں تین فٹ فی ثانیہ کی رفتار تین انچ لمبے خط سے جو حرکت کی سمت کے متوازی کھینچا گیا ہو تعبیر ہوگی۔

شکل (۳) میں فرض کرو کہ اف، اق سے رفتاریں $و_{۲}$، $و_{۱}$ کسی پیمانہ پر تعبیر ہوتی ہیں۔ چونکہ پیمانہ دونوں رفتاروں کے لیے ایک ہی ہے اس لیے

اف : اق = $و_{۲}$: $و_{۱}$

لیکن اع = $و_{۲}$ فرت، اد = $و_{۱}$ فرت

اس لیے اع : اد = $و_{۲}$: $و_{۱}$

اور اس لیے اف : اق = اع : اد

اگر ہم متوازی الاضلاع اف رق کی تکمیل کریں تو وتر ار، ف میں سے گذرے گا اور ہمیں حاصل ہوگا

ار : اف = اف : اع

اگر حاصل رفتار و ہو تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ

و = اف / فرت

(۹) اِس لیے اف : اع = و فرت : $و_{۲}$ فرت

= و : $و_{۲}$

اور اس لیے ار : اف = و : $و_{۲}$

پس ار، رفتار و کی مقدار کو اُسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے جس پر اف، رفتار $و_{۲}$ کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز چونکہ ار، حاصل حرکت اف کی سمت

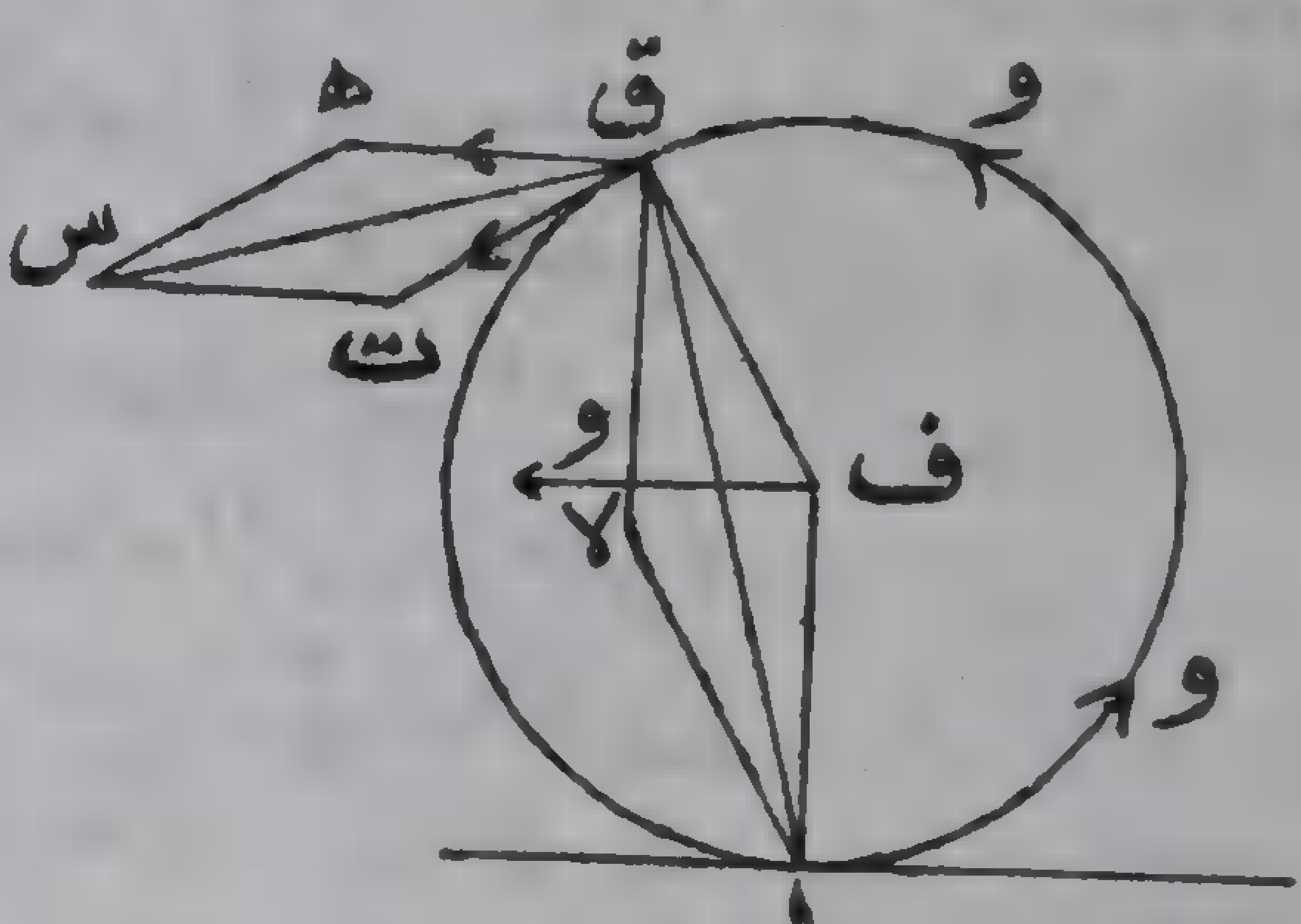
ہیں ہے اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ا ر، رفتار و کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کرتا ہے۔ اِس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلہ ثابت کر دیا۔

مسئلہ۔ اگر دو رفتاریں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے جو کسی راس ا سے نکلتے ہیں مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل مقدار اور سمت میں اُسی پیمانہ پر متوازی الاضلاع کے اُس قطر سے تعبیر ہوگا جو ا سے نکلتا ہے

یہ مسئلہ رفتاروں کے متوازی الاضلاع کے طور پر مشہور ہے۔

ہم اس کا مفہوم دو سادہ مثالوں سے واضح کریں گے۔

ا۔ فرض کرو کہ ایک گاڑی ایک ہموار سڑک پر رفتار و سے حرکت کر رہی ہے۔ ہم حوالہ کا پہلا فریم گاڑی کا جسم لیں گے اور دوسرا فریم سڑک۔ اب فریم ا کی رفتار فریم ۲ کے لحاظ سے و ہے۔ فریم ا کے لحاظ سے گاڑی کے کسی پہیہ ف کا مرکز ثابت ہے، اِس لیے کور کا کوئی نقطہ، ف کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔



شکل (۴)

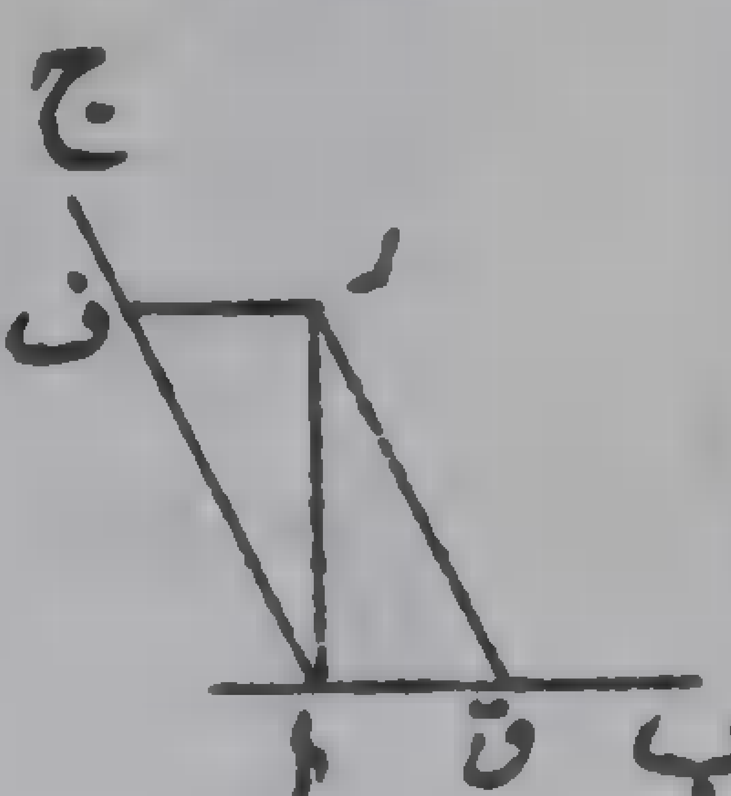
فریم ا کے لحاظ سے سڑک پیچھے کی طرف رفتار و سے حرکت کر رہی ہے، اس لیے اگر پہیہ سڑک پر نہ پھسلے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار فریم ا کے لحاظ سے و ہونی چاہیئے۔ اِس لیے کور پر کے کسی نقطہ ق کی رفتار فریم ا کے لحاظ سے مماس ق ت پر و ہوگی۔ اِس رفتار کو خط ق ت سے تعبیر کرو تو

گاڑی کی رفتار سڑک کے لحاظ سے سڑک کے متوازی ایک مساوی خط ق ھ سے تعبیر ہوگی۔ پس نقطہ ق کی حاصل رفتار متوازی الاضلاع ق ھ س ت کے وتر ق س سے تعبیر ہوگی۔ صریحاً اِس کی سمت زاویہ ھ ق ت کی تنصیف کرتی ہے۔ فرض کرو کہ پہیہ کا زیر ترین نقطہ ل ہے اور فرض کرو کہ لا سے متوازی الاضلاع ق ف ا ل لا کی تکمیل ہوتی ہے۔ صریحاً یہ (۱۰)
متوازی الاضلاع، متوازی الاضلاع ق ت س ھ کے مشابہ ہے کیونکہ دونوں متوازی الاضلاعوں میں متناظر خطوط علی القوائم ہیں۔ اسلیے

ق س : ق ت = ق ل : ق ف

اِس لیے اُس پیمانہ پر جس میں گاڑی کی رفتار مقدار میں، پہیہ کے نصف قطر ق ف سے تعبیر ہوتی ہے نقطہ ق کی رفتار، ق ل سے تعبیر ہوگی۔ پس کور پر کے مختلف نقطوں کی رفتاریں، ل سے اِن کے جو فاصلے ہیں اُن کے متناسب ہیں اور رفتاروں کی سمتیں ہر صورت میں اُس خط پر عمود ہیں جو نقطہ کو ل سے ملاتا ہے۔

۲۔ ایک جنگی جہاز ۱۸ بحری میلوں کی رفتار سے سفر کر رہا ہے اور اِس کی توپوں سے بلحاظ جہاز کے ۲۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے مرمیاں فائر کیجا سکتی ہیں۔ توپوں کو کس سمت میں قایم کرنا چاہیے کہ اُن کی ضرب ایک ایسی شئے پر پڑے جس کی سمت جہاز سے اِس کی حرکت کی سمت پر عمود ہے۔



شکل (۵)

فرض کرو کہ جہاز کی حرکت کی سمت ا ب ہے اور فرض کرو کہ توپ کو سمت ا ج میں قایم کیا گیا ہے تو جہاز کے لحاظ سے گولے کی جو رفتار ہے اُس کو ا ج پر کے ایک خط ا ف سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور

سمندر کے لحاظ سے جہاز کی جو رفتار ہے اُس کو اب پر کے ایک خط اق سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ متوازی الاضلاع اف رق کی تکمیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ وتر ار، گولے کی رفتار کو سمندر کے لحاظ سے مقدار اور سمت دونوں میں تعبیر کرے گا۔ اِس لیے ار کو حسب سوال اب کے علی القوائم ہونا چاہیے۔ اِس لیے اگر زاویہ ف ار، ط ہو جس میں توپ کو نشانہ کی شَے نظر آنے کے بعد گھمانا پڑتا ہے تو

$$\text{جب ط} = \frac{\text{ف ر}}{\text{اف}} = \frac{\text{جہاز کی رفتار}}{\text{گولے کی رفتار}}$$

جہاز کی رفتار ۱۸ بحری میل فی گھنٹہ ہے اور ایک بحری میل = ۱٫۱۵۱۵ معمولی میل = ۶۰۸۰ فٹ، اس لیے ۱۸ بحری میل کی رفتار، ۱۰۹۴۴۰ فٹ فی گھنٹہ کی رفتار کے مساوی ہے یعنے ۳۰٫۴ فٹ فی ثانیہ۔ پس

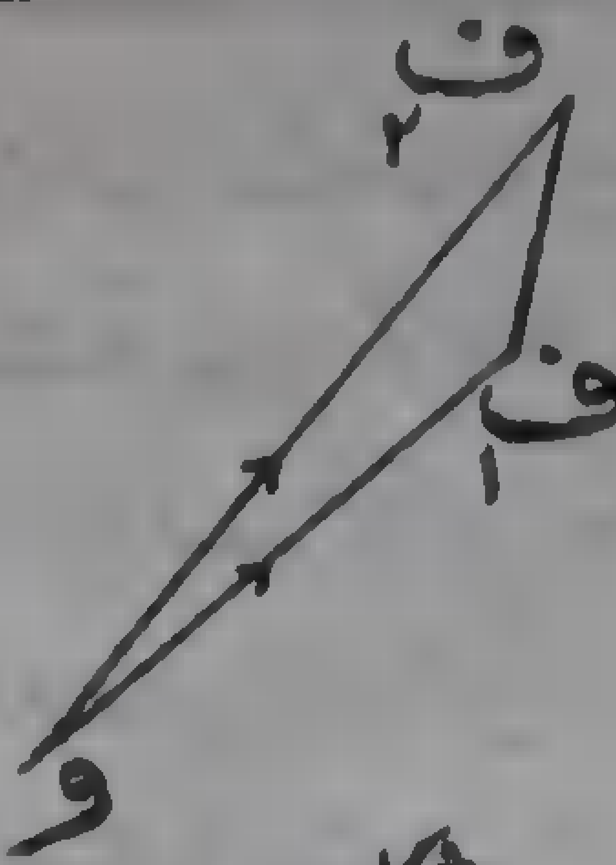
$$\text{جب ط} = \frac{۳۰٫۴}{۲۰۰۰} = ۰٫۰۱۵۲ \text{ اور اس لیے ط} = ۰^\circ\ ۵۲'\ ۱۶''$$ -

رفتاروں کا مثلث

۱۰۔ ہم رفتاروں کو ایک اور قاعدہ سے بھی مرکب کر سکتے ہیں، یہ قاعدہ **رفتاروں کے مثلث** کے طور پر مشہور ہے۔ شکل (۳) میں دو رفتاریں اف، اق سے تعبیر ہوئی تھیں اور اِن کا حاصل ار سے۔ لیکن اِن دو رفتاروں کو اف، ف ر سے بھی تعبیر کیا جا سکتا ہے اور ان کے حاصل کو ر ا سے۔ پس ہمیں حسب ذیل قاعدہ ملتا ہے:

اگر دو رفتاریں ایک مثلث کے دو ضلعوں سے (۱۱)
جو ترتیب وار لئے گئے ہوں تعبیر ہوں تو اِن کا حاصل تیسرے ضلع سے تعبیر ہو گا جبکہ اسے سمت میں پہلے ضلع سے دوسرے ضلع تک لیا جائے

مثلاً فرض کرو کہ لمحات ت، ت، پر کسی متحرک نقطہ کی رفتاریں کسی پیمانہ پر خطوط



و ف۱ اور و ف۲ سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں یہ خطوط و میں سے کھینچے گئے ہیں تو ف۱ ف۲ سے اُسی پیمانہ پر وہ زائد رفتار تعبیر ہوگی جو نقطہ نے اِس وقفہ میں حاصل کی ہے۔

کیونکہ ہم ایک ایسے فریم کا تصور کر سکتے ہیں جو وقت ت۱ پر ذرہ کی یکساں رفتار و ف۱ سے حرکت کر رہا

شکل (۶)

ہو۔ وقت ت۲ پر کی رفتار و ف۲ کو فریم کی رفتار و ف۱ اور اِس کے لحاظ سے ایک رفتار ف۱ ف۲ کا مرکب سمجھا جا سکتا ہے۔ صریحاً یہ موخر الذکر رفتار، رفتار کا اضافہ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک گاڑی ۴۲ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے اور ایک شخص گاڑی سے ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اُس سمت میں کودتا ہے جو گاڑی کی رفتار کی سمت کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ زمین کے لحاظ سے اُس کی رفتار کیا ہے۔

۲۔ ایک ریلوے ٹرین پر جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہی ہے ایک گولی کی زد پڑتی ہے جس کو اُفقاً اور ٹرین کے علی القوایم ۴۴۰ فٹ کی رفتار سے فائر کیا گیا ہے۔ اُس رفتار کی سمت اور مقدار معلوم معلوم کرو جس سے گولی ایک شخص کو جو ٹرین میں ہے ٹرین کی طرف آتی نظر آئے گی۔

۳۔ ایک جہاز جس کا سر شمال مشرق کی جانب ہے ۱۲ بحری میل کی شرح سے سمندر میں جس کی موجیں جنوب مشرق کی جانب ۵ بحری میل کی شرح سے بہہ رہی ہیں حرکت کر رہا ہے۔ ڈھائی گھنٹوں میں جہاز کتنی دور جائیگا۔

۴۔ ایک ٹرین ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے اور انتصابی سے ۳۰° کے زاویہ پر اُسی سمت میں جس میں ٹرین حرکت کر رہی ہے بارش ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہو رہی ہے۔ ٹرین کی کھڑکیوں پر بارش کے قطرے کس سمت میں گرتے نظر آئیں گے۔

۵۔ ایک جہاز کا راستہ جانب جنوب ہے اور اس کی چال ۲۰ بحری میل ہے

ہوا مغرب سے چل رہی ہے لیکن جہاز کے دود کش سے دھواں شمال سے مشرقی جانب ۳۰° کی سمت میں جاتا ہوا دکھائی دیتا ہے۔ ہوا کی رفتار کیا ہے۔

۶۔ ایک شخص ایک نہر کو جو ایک میل چوڑی ہے عبور کرنا چاہتا ہے۔ وہ بہاؤ کے مخالف، کنارے سے ۳۰° کا زاویہ بناتے ہوئے اپنی کشتی کھیتا ہے۔ اُسے عبور کرنے میں کتنی دیر لگے گی اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اپنی کشتی چلائے اور بہاؤ کی رفتار بھی ۴ میل فی گھنٹہ ہو۔

۷۔ ایک نہر کے بہاؤ کی رفتار ا ہے اور ایک شخص اپنی کشتی رفتار ب سے چلا سکتا ہے۔ اِس شخص کو اپنی کشتی کس سمت میں چلانی چاہیئے اگر وہ ساحل کے ایک ایسے نقطہ پر پہنچنا چاہے جو اُس کی روانگی کے نقطہ کے ٹھیک مقابل ہو۔ نیز اُسے کس سمت میں کشتی کھینی چاہیئے کہ وہ نہر کو کم سے کم وقت میں عبور کرے۔ (۱۲)

۸۔ ایک جہاز جس کا سر جانب جنوب ہے ایک نہر میں جس کا بہاؤ جانب مغرب ہے جا رہا ہے۔ دو گھنٹوں کے ختم پر معلوم ہوا کہ جہاز جنوب سے جانب مغرب ۱۵° کی سمت میں ۳۶ میل طے کر چکا ہے۔ جہاز اور نہر کی رفتاریں معلوم کرو۔

۹۔ ایک شخص جو جانب مشرق ۳ میل فی گھنٹہ کی شرح سے سفر کر رہا ہے معلوم کرتا ہے کہ ہوا ٹھیک شمال سے چلتی ہوئی محسوس ہو رہی ہے۔ لیکن جب وہ اپنی چال دُگنی کرتا ہے تو اُسے ہوا شمال مشرق سے چلتی ہوئی معلوم ہوتی ہے۔ ہوا کی سمت اور اس کی رفتار معلوم کرو۔

اسراع

۱۱۔ اسراع رفتار کے اضافہ کی شرح ہے۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک متحرک نقطہ کی رفتار، ایک ثانیہ میں بقدر مقدار ع کے بڑھتی ہے، خواہ یہ ثانیہ کوئی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی حرکت میں ایکساں اسراع ع فی ثانیہ ہے۔ مثلاً یہ معلوم ہوا ہے کہ جب ایک پتھر یا کوئی جسم جاذبۂ ارض

تحت گرتا ہے تو اِس کی رفتار میں ایک خاص مستقل رفتار ع فی ثانیہ کا اضافہ ہوتا ہے جہاں ع سے تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر ہوتی ہے۔ پس ہم کہتے ہیں کہ ایک گرتا ہوا پتھر ع فی ثانیہ یعنے تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے۔

بالعموم اسراع ایکساں نہیں ہوگا، رفتار کے اضافہ کی شرح سفر کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوگی۔ کسی لمحہ پر اسراع معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کے ایک صغیر وقفہ فرت میں رفتار کی تبدیلی کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ اگر رفتار کا اضافہ فرو ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ اُس لمحہ پر اسراع ہے جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے۔ اسراع بلاشبہ مقدار اور علامت دونوں رکھے گا کیونکہ رفتار یا تو بڑھ رہی ہوگی یا گھٹ رہی ہوگی۔ جب رفتار گھٹ رہی ہو تو اسراع کی علامت منفی لینی چاہئے۔ منفی اسراع کو اِبطاء کہا جاتا ہے۔ مثلاً اِبطا ع کا مطلب یہ ہوگا کہ رفتار بقدر مقدار ع فی اکائی وقت گھٹتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک مزدور ایک مکان کی چھت سے گرا اور ۴ ثانیوں میں زمین پر آرہا۔ اُس نے زمین کو کس رفتار سے ضرب لگائی جبکہ جاذبہ کی وجہ سے اسراع ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو۔

۲۔ ایک ٹرین کی رفتار ایک دئے ہوئے لمحہ پر ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے اور وہ ایک فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتی ہے۔ ۲۰ ثانیوں کے بعد اُس کی رفتار معلوم کرو۔

۳۔ ایک ٹرین بریک ڈالنے کے دس ثانیوں بعد رُکتی ہے۔ اگر ابطاء ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو ٹرین کی رفتار بریک ڈالتے وقت کیا تھی۔ (۱۳)

۴۔ ایک جسم ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ابتداء کرتا ہے اور ۶ فٹ فی ثانیہ

فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتا ہے ۔ ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار حاصل کرنے میں اُسے کتنی دیر لگے گی ۔

۵ ۔ دو جسم ایک ہی لمحہ پر علی الترتیب رفتاروں ۶ اور ۰ سے ابتداء کرتے ہیں ۔ پہلے جسم کی حرکت میں ع فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا ابطا وقوع پذیر ہوتا ہے اور دوسرے جسم کی حرکت یکساں ہے پہلے جسم کے ساکن ہونے تک دوسرا جسم کتنی دور جائے گا ۔

۶ ۔ ایک جسم سکون سے حرکت کی ابتداء کرتا ہے اور چار ثانیوں تک ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے ایکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے ۔ اگر اِس کے بعد اسراع رُک جائے تو اِس کے بعد پانچ ثانیوں میں جسم کتنی دور جائے گا ۔

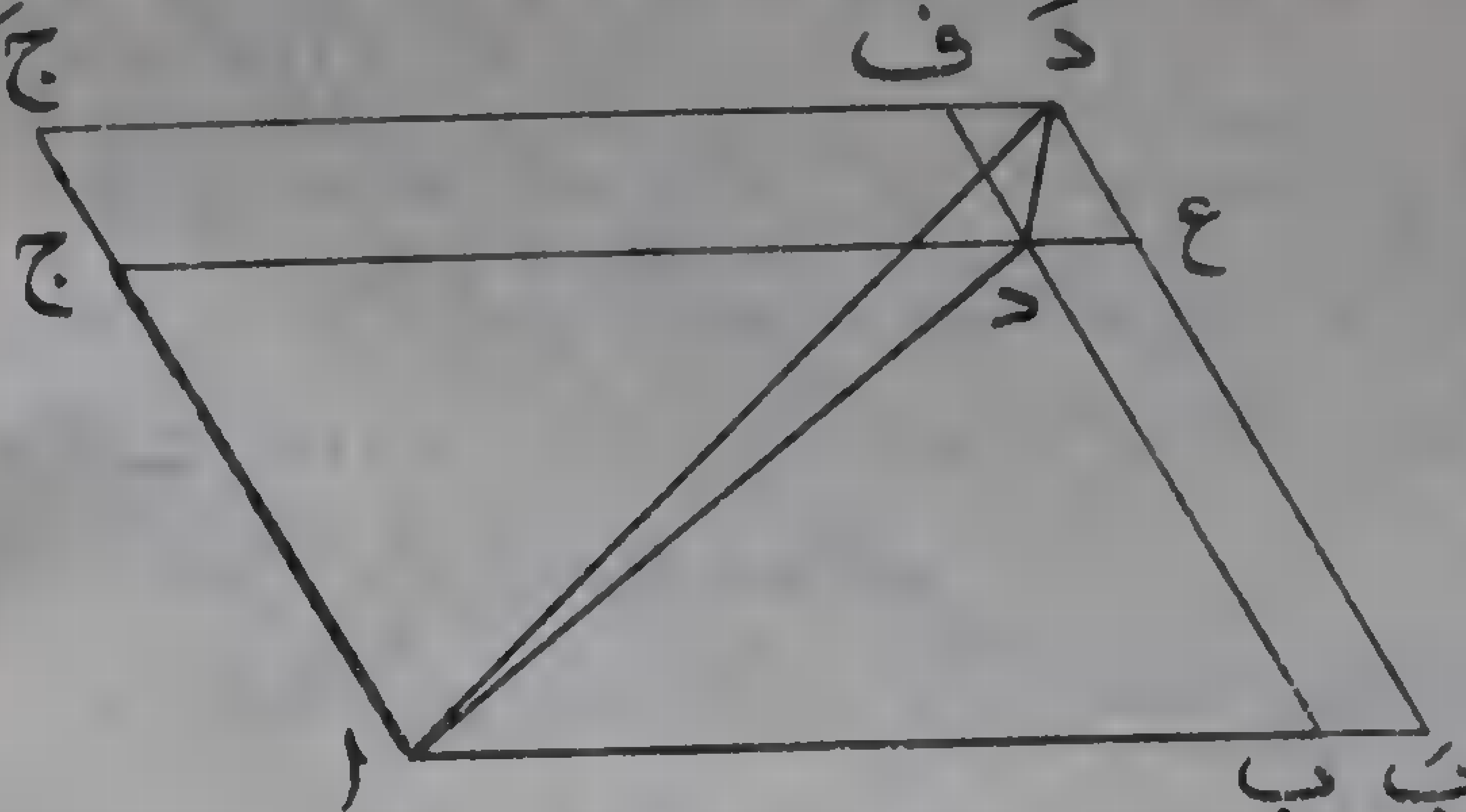
۷ ۔ ایک ٹرین کی رفتار ۵ ثانیوں میں ۴۰ میل فی گھنٹہ سے ۳۰ میل فی گھنٹہ میں گھٹ جاتی ہے اگر ابطاء یکساں ہو تو ساکن ہونے سے پیشتر وہ اور کتنی دور جائے گی ۔

۸ ۔ ایک جسم جو جاذبہ کے تحت گر رہا ہے ۳۲٫۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے ۔ اِس اسراع کو (ا) سینٹی میٹر، ثانیہ اور (ب) میل، گھنٹہ کی اکائیوں میں بیان کرو ۔

۱۲ ۔ اسراعوں کا متوازی الاضلاع ۔ مسئلہ ۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ کی رفتار دو رفتاروں ر، ر۲ سے جو معلومہ سمتوں میں ہیں مرکب ہے اور فرض کرو کہ یہ رفتاریں متغیر ہیں اور اِنکے اسراع ع، ع۲ ہیں ۔ اب اگر رفتاروں کی سمت میں دو خطوط کسی پیمانہ پر ع، ع۲ کو تعبیر کرنے کے لیے کھینچے جائیں تو حاصل اسراع اُسی پیمانہ پر اُس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوگا جسکے دو کنارے یہ خطوط ہیں ۔

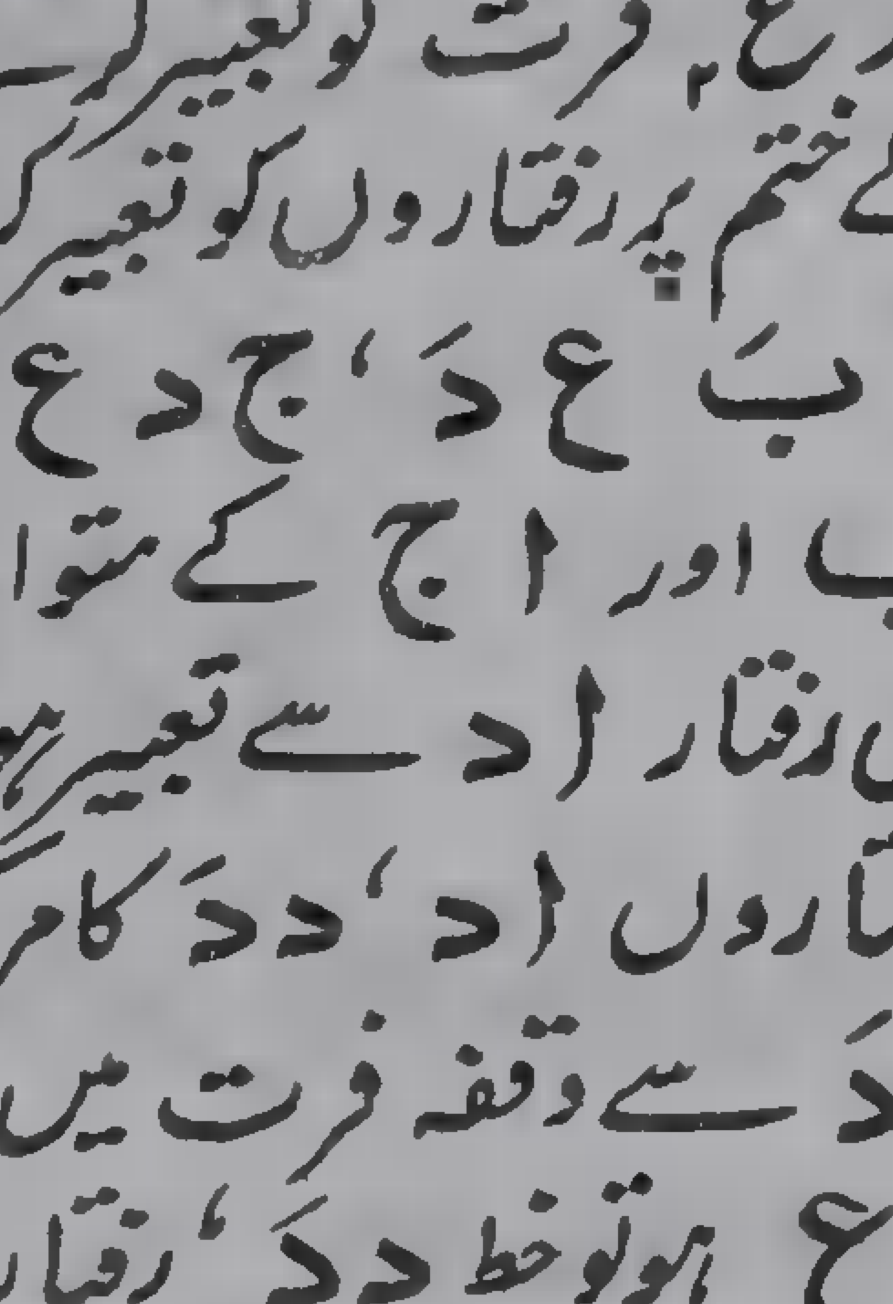
اِس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ہم نقطہ کی حرکت پر کسی صغیر وقفہ وقت میں غور کرتے ہیں جس میں نسبتی اسراع ع، ع۲ ہیں ۔ شکل میں

قرض کرو کہ اِس وقفہ
کی ابتدا پر ا ب
اور ا ج سے
علی الترتیب رفتاریں
و۱، و۲ تعبیر ہوتی ہیں
فرض کرو کہ ب بَ
اور ج جَ سے
اُسی پیمانہ پر وقفہ
فرت میں اِن رفتارو
کے صغیر اضافے



شکل (۷)

تعبیر ہوتے ہیں یعنے وہ ع۱ فرت اور ع۲ فرت کو تعبیر کرتے ہیں۔
تب ا بَ، ا جَ وقفہ فرت کے ختم پر رفتاروں کو تعبیر کریں گے۔ (۱۴)
شکل میں خطوط ب د ف، بَ ع دَ، ج د ع، جَ ف دَ
رفتاروں کو تعبیر کرنے والے خطوں ا ب اور ا ج کے متوازی کھینچو۔
اِس طرح وقفہ فرت کی ابتدا پر حاصل رفتار ا د سے تعبیر ہوگی اور وقفہ
کے ختم پر ا دَ سے۔ رفتار ا دَ کو دو رفتاروں ا د، د دَ کا مرکب خیال
کیا جا سکتا ہے اور حسب دفعہ (۱۰) د دَ سے وقفہ فرت میں رفتار کا اضافہ
تعبیر ہوتا ہے۔ پس اگر حاصل اسراع ع ہو تو خط د دَ، رفتار ع فرت
کو تعبیر کرے گا۔ اُسی پیمانہ پر خطوط د ع اور د ف سے رفتاریں ع۱ فرت
اور ع۲ فرت تعبیر ہوتی ہیں
اور د ع دَ ف ایک
متوازی الاضلاع ہے۔
اگر اسراع ع۱ اور ع۲
کو و ف۱ اور و ف۲ شکل
(۸) کسی پیمانہ پر تعبیر کریں



شکل (۸)

اور اگر تکمیل یافتہ متوازی الاضلاع کا وتر و گ ہو تو صریحاً و ف$_1$: و ف$_2$ = ع$_1$: ع$_2$ = د ع : د ف اس لیے متوازی الاضلاع و ف$_1$ گ ف$_2$ (شکل ۸) اور متوازی الاضلاع د ع دَ ف (شکل ۷) متشابہ اور متشابہاً واقع ہوں گے۔ اس لیے

و گ : و ف$_1$ = د دَ : د ع = ع فرت : ع$_1$ فرت = ع : ع$_1$

پس و گ اسراع ع کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے جس پر و ف$_1$ اور و ف$_2$ اسراعوں ع$_1$ اور ع$_2$ کو تعبیر کرتے ہیں، نیز و گ چونکہ د دَ کے متوازی ہے اس لیے وہ ع کی سمت کو بھی تعبیر کرے گا اور اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔

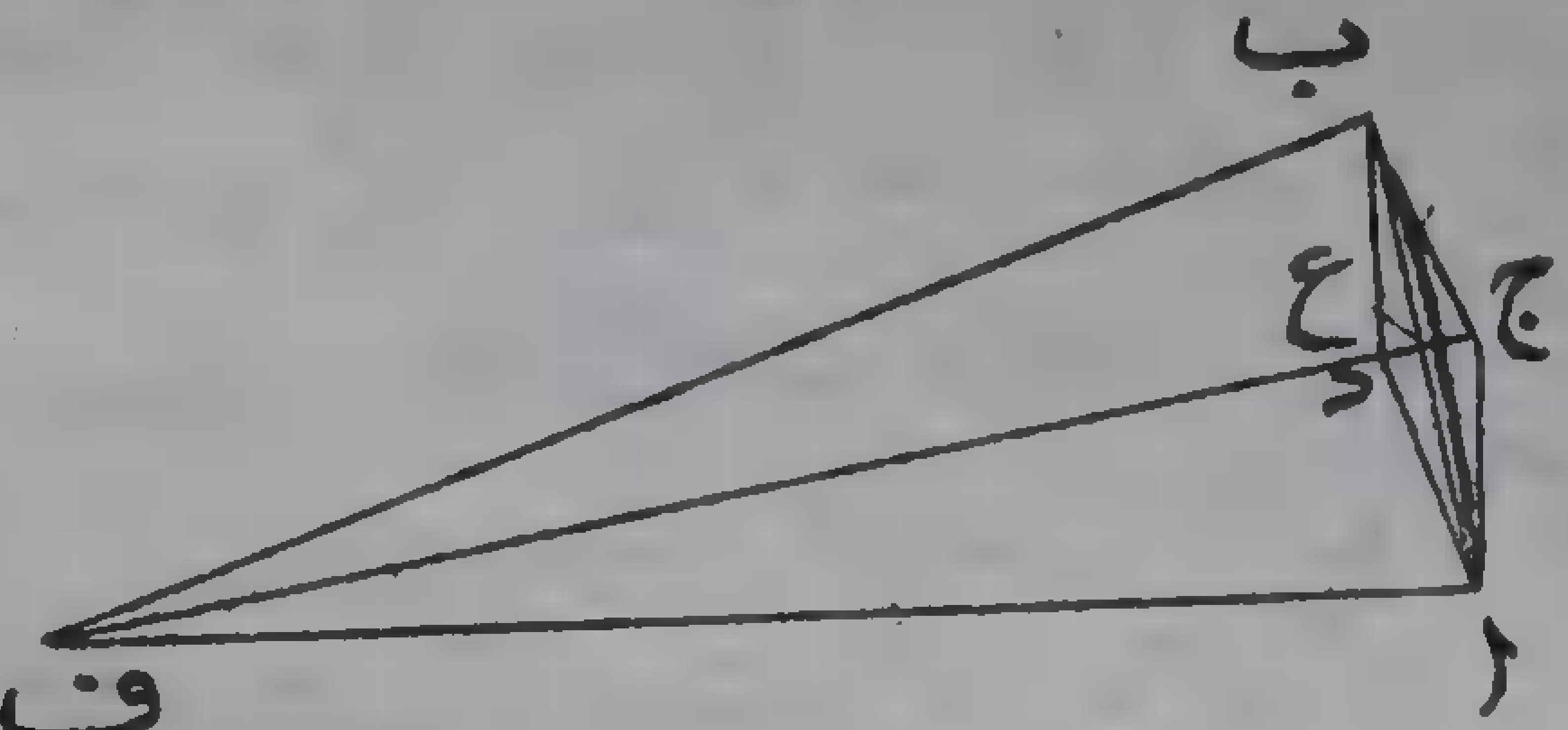
یہ ظاہر ہے کہ کسی لمحہ پر اسراع کا اسی سمت میں ہونا ضروری نہیں ہے جس میں رفتار ہے۔ شکل ۷ میں سمتیں ا د اور ا دَ، وقفہ فرت کی ابتداء اور ختم پر کی رفتاروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ جب انتہا میں ہم فرت = ۰ لیتے ہیں تو یہ خطوط منطبق ہو جاتے ہیں اور رفتار کی سمت اس لمحہ پر جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے ا د کی سمت ہوتی ہے۔ لیکن اس لمحہ پر اسراع کی سمت د دَ ہے۔

مثلاً ہم ایک ذرہ کی حرکت پر غور کرتے ہیں جو ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے یعنی پہیہ کے محیط کے کسی نقطہ کی حرکت پر جبکہ پہیہ اپنے مرکز کے گرد یکساں رفتار و سے گردش کر رہا ہو۔

فرض کرو کہ اس نقطہ کے دو محل دو لمحات پر ا، ب (شکل ۹) ہیں اور ا، ب پر کے مماس نقطہ ج پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ د، متوازی الاضلاع ا ج ب د کی تکمیل کرتا ہے۔

پہلے لمحہ پر نقطہ کی رفتار، ا ج پر رفتار و ہے۔ فرض کرو کہ یہ رفتار خود خط ا ج سے تعبیر ہوتی ہے۔ دوسرے لمحہ پر رفتار، ج ب پر رفتار و ہے، اس رفتار کو اسی پیمانہ پر خط ج ب سے یا ا د سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ ا ج اور ا د سے دو لمحوں پر کی رفتاریں تعبیر ہوتی ہیں اس لیے خط ج د سے (۱۵)
رفتار کا اضافہ ان دو لمحات کے درمیان تعبیر ہوگا۔

اب فرض کرو کہ اِن دو لمحات کے درمیان ایک صغیر وقفہ فرت کا فرق ہے تو نقطے ا، ب ایک دوسرے سے بہت ہی قریب ہونگے اور اِن کے درمیان صغیر قوس و فرت کا فاصلہ ہوگا۔ شکل میں ج د، ف میں سے گذرتا ہے خواہ ا، ب دائرہ پر کہیں ہوں، اِس لیے جب ب کو ا پر منطبق کیا جاتا ہے تو ج د، دائرہ کے اُس نصف قطر پر منطبق ہوتا ہے جو ا میں سے گذرتا ہے۔ لیکن اگر متحرک نقطہ کا اسراع ع ہو تو وقت فرت میں رفتار میں ع فرت کا اضافہ ہونا چاہیئے۔ اس لیے رفتار کے اضافہ ع فرت کو سمت اور مقدار میں ج د تعبیر کرتا ہے اور اس لیے ا پر کا اسراع، ا میں سے گذرنے والے نصف قطر پر ہے۔



شکل (۹)

یہ وہ صورت ہے جس میں اسراع رفتار کے علی القوائم ہے۔

اسراع کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج د = ۲ ج ع اور متشابہ مثلثوں سے

ع ج : ج ب = ب ع : ب ف

اب ع ج یا $\frac{1}{2}$ ج د، رفتار $\frac{1}{2}$ ع فرت کو تعبیر کرتا ہے اور ج ب، اُسی پیمانہ پر رفتار و کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے

$\frac{1}{2}$ ع فرت : و = ب ع : ب ف

انتہا میں جبکہ ب ا بہت چھوٹا ہو تو ب ع یا $\frac{1}{2}$ ب ا دائرہ کی قوس ب ا کے نصف کے مماثل ہو جاتا ہے اور اس لیے $\frac{1}{2}$ و فرت کے مماثل ہو جاتا ہے۔ پس اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو تو

$\frac{1}{2}$ ع فرت : و = $\frac{1}{2}$ و فرت : ا

یعنے $ع = \frac{و^2}{ر}$

مثالیں

۱۔ ایک ہوائی چکی کے بادبان طول میں ۲۰ فٹ ہیں اور چکی دس ثانیوں میں ایک بار گھومتی ہے۔ ایک بادبان کے سرے پر کے ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرو۔

۲۔ ۳ فٹ نصف قطر کا ایک پہیہ ۱۰ گروش فی ثانیہ کی شرح سے گھوم رہا ہے اور اسی اثناء میں جاذبہ کی وجہ سے ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے آزادانہ گر رہا ہے۔ پہیہ کے محیط پر کے مختلف نقطوں کے حاصل اسراع معلوم کرو۔

۳۔ زمین کے اُستوائی قطر کو ۷۹۲۰ میل لیکر زمین کے مرکز کی جانب (ا) ایک نقطہ کا اسراع جو خط اُستواء پر زمین کے لحاظ سے ساکن ہے، اور (ب) ایک جسم کا اسراع جو جاذبہ کے تحت خط اُستواء پر ایک ایسے اسراع سے گر رہا ہے جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ۳۲٫۰۹ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے، معلوم کرو۔ (۱۶)

۴۔ یہ فرض کر کے چاند زمین کے گرد $\frac{1}{2}$ ۲۹ دنوں میں ۲۴۰۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اس کا اسراع جانب زمین معلوم کرو۔

۵۔ سیارے سورج کے گرد مختلف دوری مدتوں میں دائرے مرتسم کرتے ہیں اس طور پر کہ دَوری مدتوں کے مربع دائروں کے نصف قطروں کے مکعبوں کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ سیاروں کے اسراع، سورج سے اِن کے فاصلوں کے مربعوں کے بالعکس متناسب ہیں۔

سمتی

۱۳۔ ہم نے تین مقداریں معلوم کی ہیں، حرکت، رفتار، اور اسراع۔ اِن میں سے ہر ایک مقدار قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کی جا سکتی ہے۔

وہ مقداریں جو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب ہو سکیں سمتی کہلاتی ہیں۔ سمتی میں مقدار اور سمت دونوں ہوتے چاہئیں اور اس لیے اُس کو کسی پیمانہ پر ایک خط مستقیم کے ذریعہ تعبیر ہونا چاہیے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ حرکت، رفتار، اور اسراع سب کے سب سمتی ہیں۔

ایک مستوی میں سمتیوں کی ترکیب اور تحلیل

۱۴۔ سمتی کی تعریف سے ظاہر ہے کہ دو سمتی قانون متوازی الاضلاع کے اطلاق سے ایک سمتی میں مرکب کیے جا سکتے ہیں۔ تعریف سے یہ بھی مستنبط ہوتا ہے کہ کسی ایک سمتی کو دو سمتیوں کے مماثل سمجھا جا سکتا ہے جبکہ یہ دو سمتی ایک متوازی الاضلاع کے کناروں سے تعبیر ہوں جو اس طریقہ سے بنایا گیا ہو کہ ابتدائی سمتی اس کے وتر سے تعبیر ہو جائے۔ یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ کوئی سمتی دو دوسرے سمتیوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔



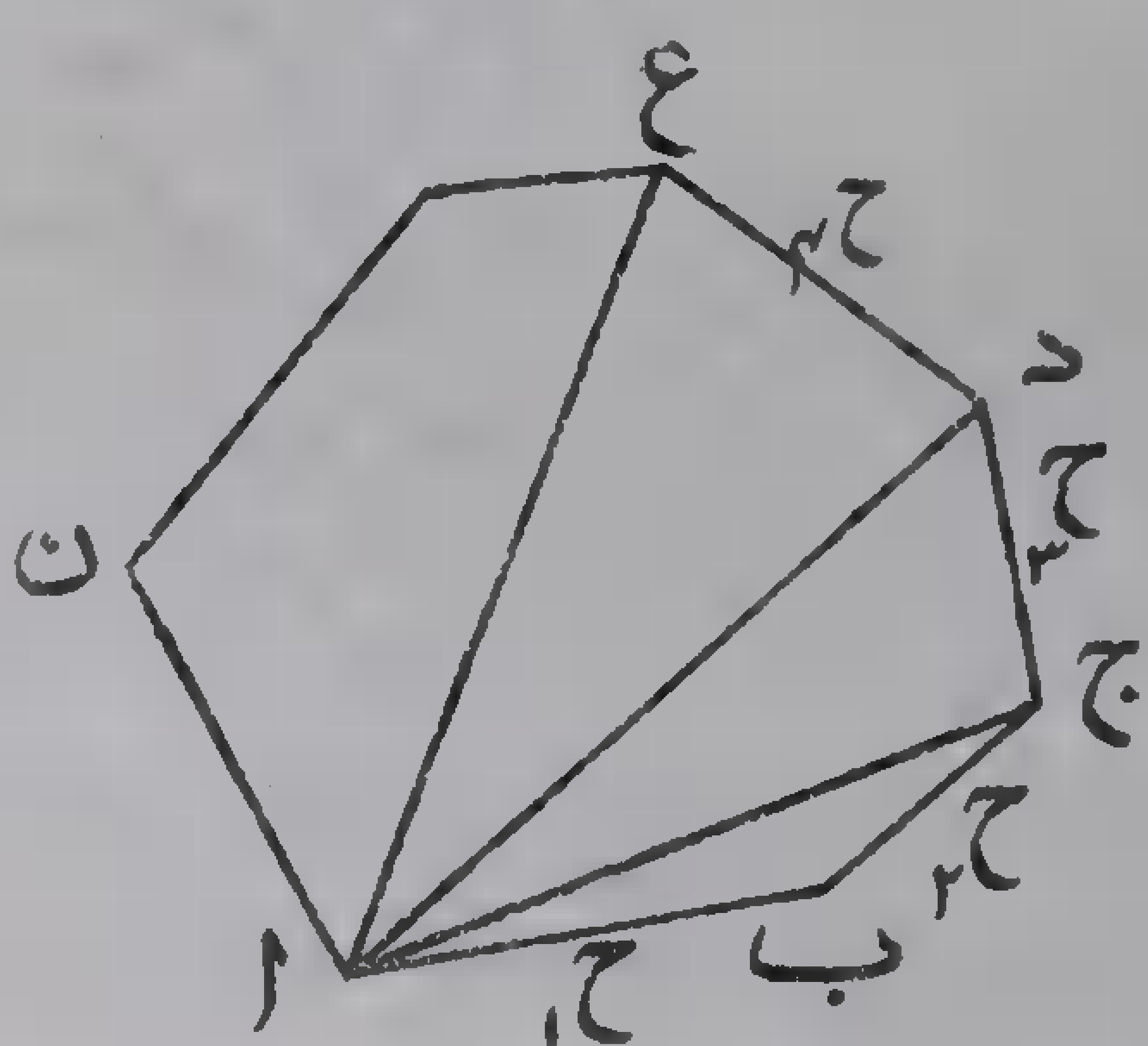
شکل (۱۰)

بالخصوص اگر ہم ایک قائم الزاویہ متوازی الاضلاع بنائیں جس کا وتر سمتی ح کو تعبیر کرے تو معلوم ہوگا کہ سمتی ح، دو سمتیوں ح جم صہ اور ح جب صہ میں تحلیل ہو سکتا ہے جہاں یہ اجزائے تحلیلی ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایسی سمتوں میں ہیں کہ سمتی ح ان کے ساتھ زاوئے صہ اور $\frac{\pi}{2}$ - صہ بناتا ہے۔

اگر ہم ایک مستوی میں دو ثابت قائم محاور ولا، وما لیں تو ہم دیکھتے کہ کوئی سمتی ح دو اجزائے ترکیبی ح جم صہ اور ح جب صہ میں

اِن محوروں کے متوازی تحلیل کیا جا سکتا ہے جہاں صہ وہ زاویہ ہے (۱۷)
جو ح، محور ولا کے ساتھ بناتا ہے۔ اجزائے ترکیبی ح جم صہ،
ح جب صہ کو ح کے اجزائے ترکیبی محوروں ولا، وما کے
متوازی کہا جاتا ہے۔

متعدد سمتیوں ح۱، ح۲، ح۳، .... حن کو مرکب کرنیکے
دو طریقے ہیں۔ پہلا طریقہ یہ ہے کہ ایک کثیر الاضلاع اب ج د .... ن
بنایا جائے ایسا کہ اس کے اضلاع اب، ب ج، ج د، .... م ن
علی الترتیب سمتیوں ح۱، ح۲، ح۳، .... حن کو تعبیر کریں تو ان
اِن کے حاصل کو تعبیر کرے گا۔ کیونکہ ح۱، ح۲ کو اول سمتی ح۱۲ میں
جو اج سے تعبیر ہوتا ہے مرکب کیا جا سکتا ہے، پھر ح۱۲ اور ح۳
کو اُس سمتی میں مرکب کیا جا سکتا ہے جو اد سے تعبیر ہوتا ہے اور علیٰ ہذا
تاآنکہ بالآخر ان حاصل ہو۔



شکل (۱۱)

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ
ہم ہر سمتی کو مثلاً حس کو قائم
محوروں ولا، وما پر اس کے
اجزائے ترکیبی
حس جم صہس، حس جب صہس
میں تحلیل کر سکتے ہیں تو اس طرح
ن سمتی، ۲ن سمتیوں میں

تحلیل ہوں گے جن میں سے ن سمتی محور و لا کے متوازی اور ن سمتی محور و ما کے متوازی ہوں گے۔ پہلے جٹ کو محور و لا کے متوازی ایک واحد سمتی

لا ≡ ح۱ جم صہ۱ + ح۲ جم صہ۲ + ...

میں مرکب کیا جا سکتا ہے اور دوسرے جٹ کو محور و ما کے متوازی ایک واحد سمتی

ما ≡ ح۱ جب صہ۱ + ح۲ جب صہ۲ + ...

میں۔ اِس طرح دو سمتی محوروں ولا، وما کے متوازی لا اور ما حاصل ہوں گے اگر اِن کا حاصل سمتی ح ہو جو ولا کے ساتھ زاویہ صہ بنائے تو

ح جم صہ = لا = ح۱ جم صہ۱ + ح۲ جم صہ۲ + ... (۱)

ح جب صہ = ما = ح۱ جب صہ۱ + ح۲ جب صہ۲ + ... (۲)

ح کی عددی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کے مربع لیتے ہیں اور انہیں جمع کرتے ہیں تو

ح۲ = لا۲ + ما۲

= (ح۱ جم صہ۱ + ح۲ جم صہ۲ + ...)۲ + (ح۱ جب صہ۱ + ح۲ جب صہ۲ + ...)۲

= ح۱۲ + ح۲۲ + ح۳۲ + ... + ۲ ح۱ ح۲ (جم صہ۱ جم صہ۲ + جب صہ۱ جب صہ۲)

+ ....

= ح۱۲ + ح۲۲ + ح۳۲ + ... + ۲ ح۱ ح۲ جم (صہ۱ − صہ۲) + ... (۱۸)

حاصل ح کی سمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کی متناظر طرفین کو تقسیم کرتے ہیں تو

$$\text{مس صہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \cdots\cdots}{\text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \cdots\cdots}$$

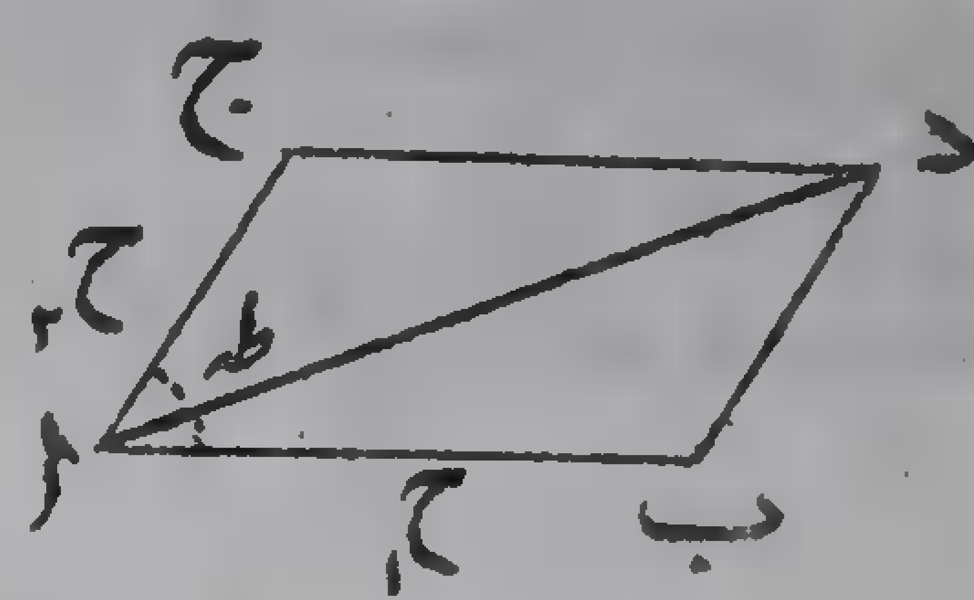
اگر صرف دو سمتیاں ح_1 اور ح_2 ہوں جو ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بنائیں تو ہم رکھ سکتے ہیں $\text{صہ}_1 - \text{صہ}_2 = \text{طہ}$ اور اس طرح

$$\text{ح}^2 = \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 + ۲\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم طہ}$$

چونکہ ح صریحاً ایک متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے ح_1، ح_2 طول کے ہیں اور زاویہ طہ پر ملتے ہیں اس لیے نتیجۂ بالا کو راست مثلث ا د ج کے علم ہندسہ سے جس میں ج پر کا زاویہ صریحاً π - طہ ہے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ پس

$$\text{ح}^2 = \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 - ۲\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم}(\pi - \text{طہ})$$

جو صریحاً اوپر کے جملے کے مماثل ہے۔



شکل (۱۲)

ہم اِس طریقہ کی توضیح کے لیے کہ سمتی ایک مستوی میں قائم اجزائے ترکیبی میں تحلیل کئے جا سکتے ہیں دو مثالیں لیتے ہیں۔

۱۔ شکل ۲ صفحہ (۸) میں فرض کرو کہ جہاز کی سمت (ا ب شکل ۵) کو محور و لا لیا گیا ہے اور اُس سمت کو جس میں گولی چلتی ہے محور و ما لیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ گولی کو رفتار و سے فائر کیا گیا ہے جو و لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے اور فرض کرو کہ جہاز کی رفتار ع ہے۔ حاصل رفتار و ما پر ہونی چاہئے تاکہ و لا پر رفتار (فرض کرو لا) صفر ہو۔ لیکن

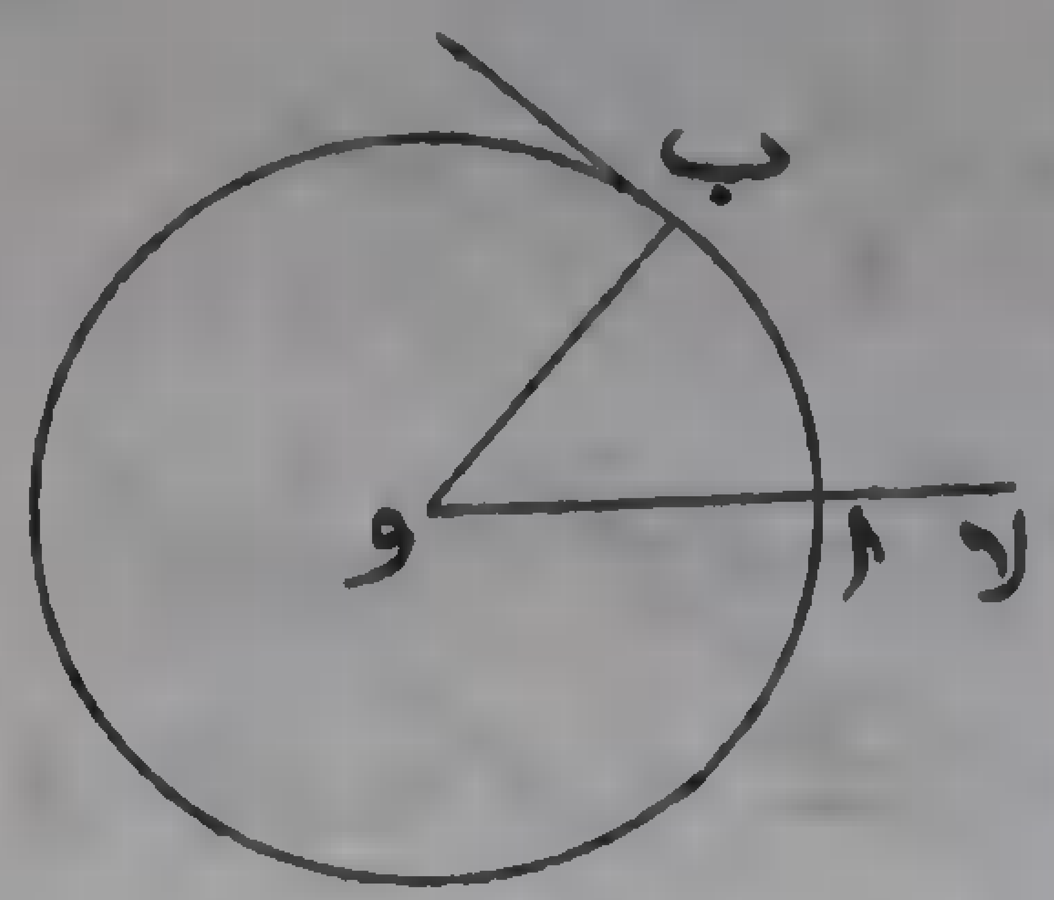
$$\text{لا} = \text{ع} + \text{و}\,\text{جم طہ}$$

اس لئے

$$\text{جم طہ} = -\frac{\text{ع}}{\text{و}}$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو حاصل ہو چکا ہے۔

۲ — ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرنا جو یکساں رفتار و سے نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے۔



شکل (۱۳)

فرض کرو کہ وقت ت = ۰ پر ذرہ کا محل ا ہے اور لا کا محور و ا ہے۔ وقت ت کے بعد ذرہ، قوس کا طول و ت طے کرے گا، اس لیے اگر وقت ت کے بعد اس کا محل ب ہے تو زاویہ ب و ا دائری ناپ میں $\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$ ہے۔ اسلیے ب پر رفتار کی سمت یعنے ب پر کے مماس کی سمت و لا کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2} + \frac{\text{وت}}{\text{ا}}$ بنائے گی (۱۹)
اور اس لیے رفتار کے اجزائے ترکیبی محاور و لا، و ما پر و_1 اور و_2 ہوں تو

$$\text{و}_1 = \text{و جم}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\text{وت}}{\text{ا}}\right) = -\text{و جب}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

$$\text{و}_2 = \text{و جب}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\text{وت}}{\text{ا}}\right) = \text{و جم}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

و لا پر اسراع $\frac{\text{فر}\,\text{و}_1}{\text{فر}\,\text{ت}}$ ہے اور اس لیے بلحاظ ت کے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$-\frac{\text{و}^2}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

اسی طرح و ما پر اسراع $\frac{\text{فر}\,\text{و}_2}{\text{فر}\,\text{ت}}$ یعنے

$$-\frac{\text{و}^2}{\text{ا}}\,\text{جب}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

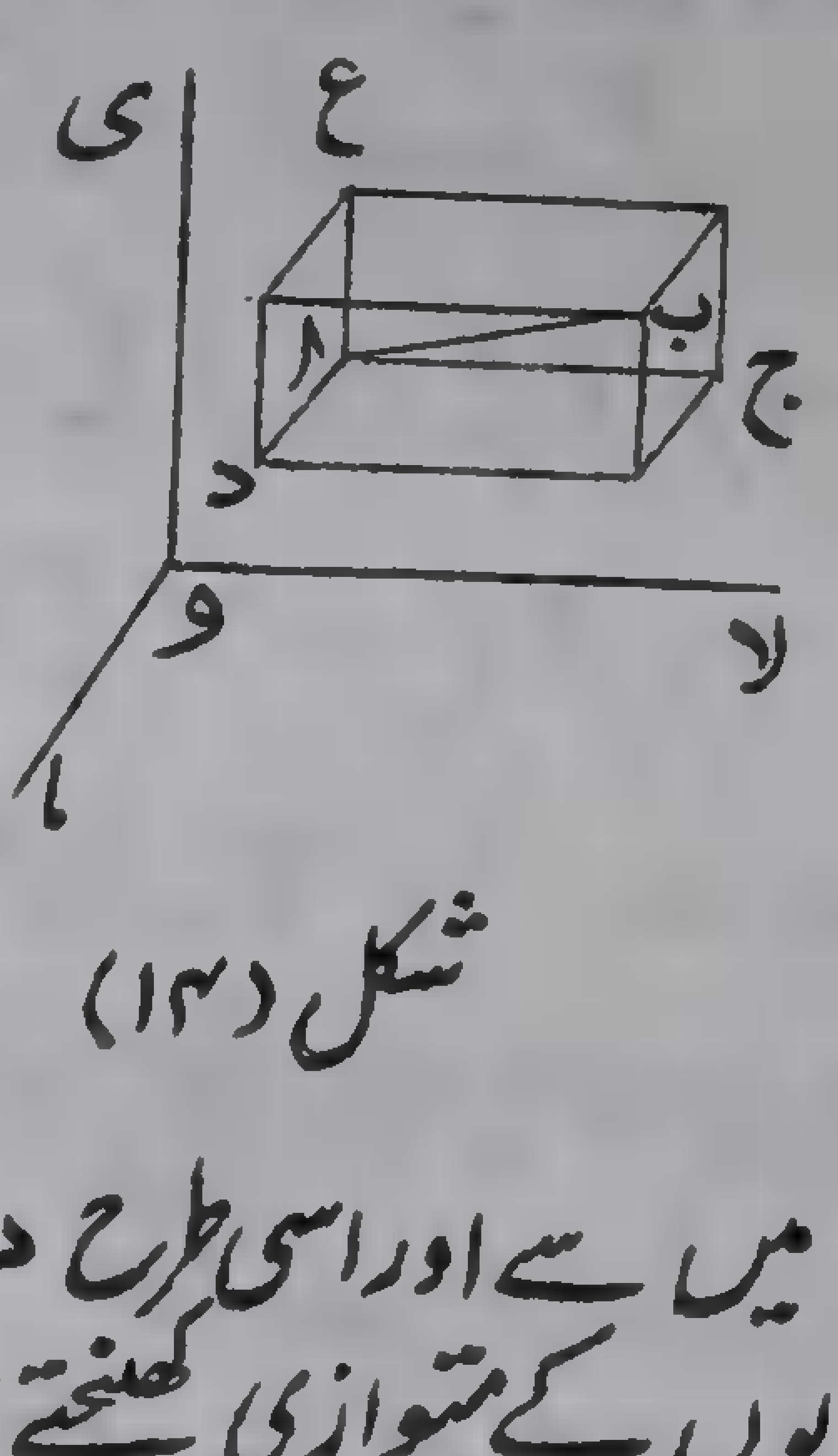
حاصل ہوتا ہے۔

اِن اسراعوں کو مرکب کرنے سے ب و پر اسراع $\frac{و^{2}}{ر}$ حاصل ہوتا ہے

اور یہ وہی نتیجہ ہے جو صفحہ (۲۳) پر حاصل کیا جا چکا ہے۔

فضاء میں سمتیوں کی ترکیب اور تحلیل

یہ ہو سکتا ہے کہ وہ سمتی جنہیں مرکب کرنا ہے ایک ہی مُستوی میں نہ ہوں۔ لیکن اِن کا حاصل دریافت کرنے کا طریقہ اصولاً وہی ہے۔ چنانچہ ہم فضاء میں ایک کثیر الاضلاع ا ب ج د .... ن بناتے ہیں ایسا کہ اِس کے اضلاع اب، ب ج، .... م ن سمتیوں $ح_1$، $ح_2$، ... $ح_ن$ کو تعبیر کریں حسب صورت ماسبق یہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ حاصل سمتی ا ن ہے۔



شکل (۱۴)

بالعموم سہولت اِس میں ہوتی ہے کہ ہر سمتی کو فضاء میں قائم محوروں کے متوازی تحلیل کیا جائے۔

اگر سمتی اب دیا گیا ہو تو ہم ا میں سے اور اسی طرح ب میں سے تین مستویاں محددوں کے مستویوں کے متوازی کھینچتے ہیں۔ اِن سے ایک قائم متوازی السطوح حاصل ہوتا ہے جس کا ایک وتر اب ہے۔ اس کے کناروں اج، اد، اع سے تین سمتی تعبیر ہوں گے جو اب کے عِوض لیے جا سکتے ہیں یہ سمتی جو محوروں کے متوازی ہیں سمتی اب کے اجزائے ترکیبی ہیں۔

فرض کرو کہ ن سمتی ہیں اور سمتی $ح_س$ کے سمتی زاویے $ع_س$، $ی_س$، $ت_س$ جیسے

سے تعبیر ہوتے ہیں۔ حسب طریقۂ بالا ہر سمتی $\text{ح}_{\text{س}}$ کو محوروں کے متوازی تین اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، اِن اجزائے ترکیبی کی مقداریں ہیں (۲۰)

$$\text{ح}_{\text{س}}\ \text{جم}\ \text{ع}_{\text{س}}،\quad \text{ح}_{\text{س}}\ \text{جم}\ \text{ب}_{\text{س}}،\quad \text{ح}_{\text{س}}\ \text{جم}\ \text{ج}_{\text{س}}$$

اِس طریقہ سے ۳ ن سمتی حاصل ہوں گے، اِن میں سے محور لا کے متوازی ن سمتیوں کو ایک واحد سمتی لا میں مرکب کیا جا سکتا ہے چنانچہ

$$\text{لا} = \text{ح}_1\ \text{جم}\ \text{ع}_1 + \text{ح}_2\ \text{جم}\ \text{ع}_2 + \cdots + \text{ح}_{\text{ن}}\ \text{جم}\ \text{ع}_{\text{ن}} \quad \cdots (۳)$$

پس اِس پورے نظام کی بجائے ایک واحد سمتی لا کو لیا جا سکتا ہے، اسی طرح محور ما اور محور ی کے متوازی سمتیوں کو ایک ایک واحد سمتی میں مرکب کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{ما} = \text{ح}_1\ \text{جم}\ \text{ب}_1 + \text{ح}_2\ \text{جم}\ \text{ب}_2 + \cdots + \text{ح}_{\text{ن}}\ \text{جم}\ \text{ب}_{\text{ن}}، \quad \cdots (۴)$$

$$\text{ی} = \text{ح}_1\ \text{جم}\ \text{ج}_1 + \text{ح}_2\ \text{جم}\ \text{ج}_2 + \cdots + \text{ح}_{\text{ن}}\ \text{جم}\ \text{ج}_{\text{ن}}، \quad \cdots (۵)$$

اِن تین سمتیوں لا، ما، ی کا حاصل اور اِس لیے ابتدائی ن سمتیوں کا حاصل صریحاً اُس قائم الزاویہ متوازی السطوح کا ایک وتر ہے جس کے کنارے لا، ما، ی ہیں۔ اگر اِس حاصل کے طول کو ح سے تعبیر کیا جائے اور اِس کے سمتی زاویوں کو ع، ب، ج سے تو

$$\text{ح}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2$$

$$\text{اور}\quad \text{جم ع} = \frac{\text{لا}}{\text{ح}}،\quad \text{جم ب} = \frac{\text{ما}}{\text{ح}}،\quad \text{جم ج} = \frac{\text{ی}}{\text{ح}}$$

اس لیے حاصل، مقدار اور سمت دونوں میں پوری طرح معلوم ہو گیا۔

مرکز ہندسی

۱۶ — فرض کرو کہ سمتیوں کا ایک نظام سمت میں $و\,ا_1$، $و\,ا_2$، ...، $و\,ا_ن$ سے اور مقداریں $ک_1 \times و\,ا_1$، $ک_2 \times و\,ا_2$، ....، $ک_ن \times و\,ا_ن$ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں $ک_1$، $ک_2$، ....، $ک_ن$ کوئی مقداریں ہیں۔ فرض کرو کہ $ا_ر$ کے محدد، و میں سے گذرنے والے محوروں کے لحاظ سے $لا_ر$، $ما_ر$، $ی_ر$ ہیں اور اِن محوروں کے لحاظ سے $و\,ا_ر$ کے سمتی زاوئے $ع_ر$، $ب_ر$، $ج_ر$ ہیں اور سمتی $ک_ر \times و\,ا_ر$ کی مقدار $ح_ر$ ہے۔ اِن محوروں پر اِس سمتی کے اجزائے ترکیبی ہیں

$$ح_ر \text{ جم } ع_ر = ک_ر \times و\,ا_ر \text{ جم } ع_ر = ک_ر\, لا_ر$$

$$ح_ر \text{ جم } ب_ر = ک_ر \times و\,ا_ر \text{ جم } ب_ر = ک_ر\, ما_ر$$

$$ح_ر \text{ جم } ج_ر = ک_ر \times و\,ا_ر \text{ جم } ج_ر = ک_ر\, ی_ر$$

اس لیئے مساواتوں (۳)، (۴)، (۵) کو لکھا جا سکتا ہے اس طرح

$$لا = \sum_{1}^{ن} ک_ر\, لا_ر، \quad ما = \sum_{1}^{ن} ک_ر\, ما_ر، \quad ے = \sum_{1}^{ن} ک_ر\, ی_ر \qquad (۲۱)$$

اِس نتیجہ کی تفہیم کے لیے ہم نُقطوں کے ایک نظاُم کے مرکز ہندسی کے تخیل سے استفادہ کرتے ہیں۔ بموجب تعریف نقطوں کے کسی نظام کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے کہ اس کا فاصلہ محدودں کے تین مستویوں میں سے کسی سے اُن فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے نظام کے تمام نقطوں کے ہیں جبکہ ہر فاصلہ کو اس کی واجب علامت کے ساتھ لیا گیا ہو

اِس تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہم خواہ کوئی مستوی لیں اُس سے مرکز ہندسی کا فاصلہ اُن فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے ن نقطوں کے ہیں۔ کیونکہ اگر روین نقطہ کے محدد لار، مار، یار ہوں تو مرکز ہندسی کے محدد (فرض کرو لاَ، ماَ، یَ) ہوں گے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}} \text{لا}_{\text{ر}} \text{، } \bar{\text{ما}} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}} \text{ما}_{\text{ر}} \text{، } \bar{\text{ی}} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}} \text{ی}_{\text{ر}} \quad \text{....(۹)}$$

اور مرکز ہندسی سے کسی مستوی

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی} + \text{د} = 0$$

کا عمودی فاصلہ ہوگا

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}}\left(\text{ا}\,\bar{\text{لا}} + \text{ب}\,\bar{\text{ما}} + \text{ج}\,\bar{\text{ی}} + \text{د}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}}\,\frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}}\left(\text{ا لا}_{\text{ر}} + \text{ب ما}_{\text{ر}} + \text{ج ی}_{\text{ر}} + \text{د}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}}\frac{\text{ا لا}_{\text{ر}} + \text{ب ما}_{\text{ر}} + \text{ج ی}_{\text{ر}} + \text{د}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2}}$$

جس سے نتیجہ ثابت ہے۔

اب فرض کرو کہ ن نقطوں میں سے کر نقطے سب کے سب نقطہ لار، مار، یر پر منطبق ہوتے ہیں، کب نقطے لاب، ماب، یب پر اور علیٰ ہذا القیاس تو مرکز ہندسی کے محدد ہوں گے (مساواتوں (۷) کی رو سے)

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\text{لا}} &= \frac{1}{\text{ن}}\sum \text{ک}_{\text{ر}}\,\text{لا}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}}\,\text{لا}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \\
\bar{\text{ما}} &= \frac{1}{\text{ن}}\sum \text{ک}_{\text{ر}}\,\text{ما}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}}\,\text{ما}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \\
\bar{\text{ی}} &= \frac{1}{\text{ن}}\sum \text{ک}_{\text{ر}}\,\text{ی}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}}\,\text{ی}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{........(۸)}$$

جہاں عمل جمع فضاء کے اُن مختلف نقطوں پر لیا گیا ہے جن پر اصلی نقطے مجتمع ہیں۔ اِن نقطوں کو ا، ب، ج ..... سے تعبیر کرو تو نقطہ لاَ، مَا، یَ کو ضاربوں ک$_1$، ک$_2$، ..... کے جواب میں نقطوں ا، ب، ج .... کا مرکز ہندسی کہتے ہیں۔ (۲۲)

اِن نتیجوں کے ذریعہ مساواتیں (۶)

لاَ = لا $\sum_{1}^{n}$ ک$_r$، مَا = ما $\sum_{1}^{n}$ ک$_r$، یَ = ی $\sum_{1}^{n}$ ک$_r$ (۹)

میں تحویل ہوتی ہیں۔

اِس لیے سمتیوں کے مندرجۂ بالا جٹ کا حاصل، خط وج کی سمت میں ہے اور اِس کی مقدار وج $\sum_{1}^{n}$ ک$_r$ ہے۔ مساواتوں (۹) کی رو سے ضارب ک$_r$ کوئی عدد ہو سکتے ہیں مثبت یا منفی، اِس لیے مجموعہ $\sum_{1}^{n}$ ک$_r$ مثبت، صفر یا منفی ہو سکتا ہے۔ بالخصوص اگر سمتی، مقدار اور سمت دونوں میں، وا$_1$، وا$_2$، ..... وا$_n$ سے تعبیر ہوں تو حاصل، سمت وج میں ہے اور اس کی مقدار ن × وج ہے جہاں ن سمتیوں کی تعداد ہے اور نقطہ ج حسب تعریف بالا مرکز ہندسی ہے۔ پس حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:-

مسئلہ۔ اگر مقداروں ک$_1$ × وا$_1$، ک$_2$ × وا$_2$، ..... کے سمتی خطوط وا$_1$، وا$_2$ ..... پر عمل کریں تو اِن کے حاصل کی مقدار (ک$_1$ + ک$_2$ + ...) وج ہوگی اور وہ سمت

و ث میں عمل کرے گا جہاں ث، ا۱، ا۲..... کا مرکز ہندسی ضاربوں ک۱، ک۲،... کے جواب میں ہے۔

مثالیں

۱ـــ دو سمتیوں کا حاصل معلوم کرو جن کی مقداریں ۵ ف، ۱۲ ف ہیں اور جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۲ـــ ایک سمتی ف، دو سمتیوں کا حاصل ہے جو اس کے ساتھ مخالف سمتوں میں ۳۰° اور ۴۵° کے زاوئے بناتے ہیں۔ یہ موخر الذکر سمتی کتنے بڑے ہیں۔

۳ـــ معلومہ مقداروں کے دو سمتیوں کی سمتیں کس طرح معلوم کیجا سکتی ہیں کہ ان کا حاصل دی ہوئی مقدار اور سمت کا ہو۔ یہ کب ناممکن ہوگا۔

۴ـــ ثابت کرو کہ اگر دو معلومہ سمتیوں کے درمیانی زاویہ کو بڑھا دیا جائے تو ان کا حاصل گھٹتا ہے۔

۵ـــ کن شرطوں کے تحت مقداروں ۷، ۲۴ اور ۲۵ کے سمتیوں کے ایک نظام کا حاصل صفر کے مساوی ہوگا۔

۶ـــ طولوں ف، ف، اور ف √۲ کے تین سمتی ایک نقطہ پر (۲۳)
ملتے ہیں اور باہم علی القوائم ہیں۔ حاصل کی مقدار اور وہ زاوئے معلوم کرو جو حاصل کی سمت اور ہر جزو ترکیبی کی سمت کے درمیان ہیں۔

۷ـــ طولوں ف، ۲ ف، ۳ ف کے تین سمتی ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور ان کی سمتیں اس نقطہ پر ملنے والے ایک مکعب کے تین رخوں کے وتروں کی سمتیں ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔

۸ـــ تین سمتی ایک متوازی السطوح کے تین رخوں کے وتروں سے جو ایک راس ا پر ملتے ہیں تعبیر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا حاصل متوازی السطوح کے اس وتر کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے جو ا سے کھینچا گیا ہے۔

۹ـــ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ د ہے اور اس کے

اندرونی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ ثابت کرو کہ سمتیوں ا × اد، ب × ب د، ج × ج د کا حاصل (ا + ب + ج) ع د ہے جہاں ا، ب، ج، مثلث کے ضلعوں کے طول ہیں۔

۱۰۔ دو متوازی الاضلاع اب ج د، اَبَ جَ دَ ایک ہی مستوی میں ہیں۔ ان سمتیوں کا حاصل معلوم کرو جو ایک نقطہ سے اَا، بَ ب، جَ ج، دَ د کے متوازی اور ان کے متناسب کھینچے گئے ہیں۔

۱۱۔ اگر مثلث اب ج کے حائط دائرہ کا مرکز و ہو اور مرکز عمودی ف تو ثابت کرو کہ وف، سمتیوں و ا، وب اور وج کا حاصل ہے۔ نیز یہ کہ ۲ ف، و، سمتیوں ف ا، ف ب، ف ج کا حاصل ہے۔

۱۲۔ ایک دائرے کے وتر اد ب اور ج و د علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سمتیوں و ا، وب، وج، و د کا حاصل سمتی و ف کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ف، دائرہ کا مرکز ہے۔

عام مثالیں

(ان مثالوں میں اسراع بوجہ جاذبہ ارض کو ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ فرض کرو)

۱۔ ایک نقطہ ۲، ۴، ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتاریں ایکساتھ ان سمتوں میں رکھتا ہے جو اس نقطہ کی ہیں جو ایک مثلث متساوی الاضلاع کے تین ضلعوں کو ترتیب وار مرتسم کرتا ہے۔ اول الذکر نقطہ کی رفتار کی مقدار معلوم کرو۔

۲۔ ایک نقطہ ایک ساتھ رفتاریں (ہر ایک و کے مساوی) ان خطوں کی سمتوں میں رکھتا ہے جو ایک منتظم مسدس کے مرکز سے اس کے پانچ راسوں تک کھینچے گئے ہیں۔ حاصل رفتار کی مقدار اور سمت معلوم کرو۔

۳۔ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ایک شامیانہ جو عرشے کے اوپر ۸ فٹ بلند ہے عرشہ کے اس حصہ کو بارش سے بچاتا ہے جو شامیانہ کے کنارے کے انتصابی ظل سے ۴ فٹ سے زیادہ پیچھے ہے لیکن جب جہاز ساکن ہوتا ہے تو

عرشہ کے خشک وتر حصوں کا خطِ فاصل اِس ظل سے ۶ فٹ آگے ہوتا ہے۔ جہاز کی رفتار معلوم کرو اگر بارش کی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۴ ـــ ایک جہاز پر جو خطِ استوا پر مشرق سے مغرب کی طرف جا رہا ہے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دن ظہر (مقامی وقت) سے دوسرے دن ظہر (مقامی وقت) تک فاصلہ طے شدہ ۴۲۰ میل ہے۔ دن کتنا طویل ہوگا اگر جہاز اُسی شرح سے مغرب سے مشرق کی جانب چلے۔

۵ ـــ ایک ریل کی پٹڑی شرقاً غرباً عرض بلد λ میں واقع ہے۔ ایک ریل گاڑی (۲۴)
کو اس پٹڑی پر کس شرح سے چلنا چاہیئے کہ سورج ہمیشہ اس کے ٹھیک جنوب میں رہے۔

۶ ـــ ایک جہاز کا ٹھیک راستہ اور رفتار معلوم کرو جو جانب شمال (بموجب کمپاس) ۱۰ بحری میلوں کی شرح سے ۴ بحری میل کے بہاؤ میں جو جنوب مشرق کی جانب ہے جا رہا ہے۔ نیز کمپاس سے سمت کی وہ تبدیلی معلوم کرو تاکہ جہاز ٹھیک شمالی راستہ اختیار کرے۔

۷ ـــ ایک سیکل سوار ہوا کی رفتار سے زیادہ تیز سیکل چلاتا ہے اور ہوا کی سمت سمجھنے میں غلطی کرتا ہے اور اُس سمت کو ہوا کی سمت سمجھتا ہے جس میں ہوا اُسے آکر لگتی ہے جبکہ وہ متحرک ہے۔ ثابت کرو کہ ہوا ہمیشہ اُس کے خلاف چلتی ہوئی معلوم ہوگی خواہ وہ کسی سمت میں سیکل چلائے۔

۸ ـــ ایک جہاز جو شرقاً ۲۰ بحری میل کی چال سے جا رہا ہے بوقت ۱۱ بجے صبح ایک روشنی کے مینار سے گزرتا ہے۔ ایک دوسرا جہاز جو اُسی شرح سے جنوب میں جا رہا ہے اُسی نقطہ کو ایک بجے دوپہر پر عبور کرتا ہے۔ کس وقت وہ باہم قریب ترین ہوں گے اور اُس وقت اِن کے درمیان کیا فاصلہ ہوگا۔

۹ ـــ دو ذرے ایک دائرے کے محیط میں علی الترتیب رفتاروں v اور $2v$ سے مخالف سمتوں میں حرکت کرتے ہیں کن محلوں میں اِن کی اضافی رفتار بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی ہوگی اور اِس وقت اِس کی قیمتیں کیا ہوں گی۔

۱۰ ـــ دو ذروں کی اضافی حرکت معلوم کرو جو ایک ہی رفتار v سے حرکت کر رہے ہیں لیکن ایک ذرہ نصف قطر a کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اور دوسرا

ایک قطر پر حرکت کرتا ہے۔

۱۱۔ دو ذرّے یکساں طور پر خطوطِ مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک معلومہ وقت پر اِن کے درمیان فاصلہ ا ہے اور اِن کی اضافی رفتار و ہے، اِس اضافی رفتار کے اجزائے ترکیبی ا کی سمت میں اور اس کے عمود وار ع اور ط ہیں۔ ثابت کرو کہ جب وہ باہم قریب ترین ہوتے ہیں تو اِن کے درمیان فاصلہ $\frac{اط}{و}$ ہے اور وہ اس محل پر وقفہ $\frac{اع}{و^{2}}$ کے بعد پہنچتے ہیں۔

۱۲۔ ایک کھیت میں تین گھوڑے ایک خاص لمحہ پر ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راسوں پر ہیں۔ ایک شخص کے لحاظ سے جو ایک سڑک پر جا رہا ہے گھوڑوں کی اضافی حرکت سمت میں مثلث کے ضلعوں کے اطراف (ایک ہی جہت میں) اور مقدار میں شخص کی رفتار کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ تین گھوڑے ہم نقطہ خطوں پر حرکت کر رہے ہیں۔

۱۳۔ دو نقطے نصف قطروں ا اور ب کے ہم مرکز دائرے ایسی رفتاروں سے مرتسم کرتے ہیں جو نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ اضافی رفتار اُس خط کے متوازی ہے جو اِن نقطوں کو ملاتا ہے جبکہ اِن نقطوں سے کھینچے ہوئے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ

$$جتم^{-1}\frac{۲اب}{ا^{2}+ب^{2}}$$ ہو۔

۱۴۔ ایک پتھر کو ایک غبارے سے جو افقاً حرکت کر رہا ہے چھوڑا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ ۴ ثانیہ ہوا میں رہتا ہے اور زمین سے ایسی سمت میں ٹکراتا ہے جو انتصابی سے ۱۵ درجہ کا زاویہ بناتی ہے۔ غبارے کی رفتار معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک گولہ اوپر وار سمت میں افق کے ساتھ ۳۰ درجہ کے زاویہ پر (۲۵)
۶۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک مکان کی چھت سے پھینکا گیا ہے۔ پہلے اور دوسرے ثانیوں کے ختم پر اس کی حرکت کی سمتیں اور نیز اس کی رفتاریں معلوم کرو۔

۱۶ — ایک گولہ ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہوا میں اُچھالا گیا اور ایک ثانیہ کے ختم پر معلوم ہوا کہ وہ اچھال کی سمت کے علی القوائم خط میں حرکت کر رہا ہے۔ اس لمحہ پر اُس کی رفتار کیا ہے ۔

۱۷ — اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ گولی کی رفتار ایک یکساں افقی رفتار ہے جو آواز کی رفتار کے ن گنے کے مساوی ہے تو ثابت کرو کہ وہ نقطے جن پر گولی کے فائر کرنے کی اور گولی کے نشانے پر لگنے کی آوازیں ایک ساتھ سُنائی دیتی ہیں خروج المرکز ن کے ایک قطع زائد پر واقع ہیں۔ اُس صورت کا امتحان کرو جس میں ن اکائی کے تقریباً مساوی ہو۔

۱۸ — اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائری مدار میں ۲۹،۶ کیلومیٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتی ہے اور نور کی رفتار ۳۰۰۰۰۰ کیلومیٹر فی ثانیہ ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی حرکت کی وجہ سے سورج کا ظاہری ہٹاؤ کیا ہے۔

۱۹ — اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائرہ کو ایک سال میں یکساں طور پر مرتسم کرتی ہے اور سورج اور زمین کے مرکزوں کے درمیان سورج کے ۲۲۰ نصف قطروں کا فاصلہ ہے اور سورج کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا ۱۰۸ گنا ہے تو زمین کے سایہ کے راس کی رفتار معلوم کرو اگر سورج کے نصف قطر کو طول کی اکائی اور ایک سال کو وقت کی اکائی فرض کیا جائے۔

(۲۶)

دوسرا باب

قوت اور قوانین حرکت

قوانین نیوٹن

۱۷ — ہم قبل ازیں بیان کر چکے ہیں کہ قوانین حرکت وہ مواد ہے جسے تجربی علم الحیل نے نظری علم الحیل کے واسطے مہیا کیا ہے تاکہ اس سے کام لیا جائے۔ نیوٹن نے ان قوانین کو جامع شکل میں بیان کیا ہے۔

قانون اول۔ ہر جسم اپنی حالت سکون میں رہتا ہے یا ایک خطِ مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں تاآنکہ وہ قوت عاملہ سے اپنی حالت بدلنے پر مجبور نہ ہو جائے۔

قانون دوم۔ معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اُس خط مستقیم کی سمت میں وقوع پذیر ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے۔

قانون سوم۔ ہر عمل کے جواب میں ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے۔

۱۸ — اِن قوانین میں مختلف نئی اصطلاحیں بیان ہوئی ہیں۔ قوت،

معیار حرکت، عمل، تعامل ـ اور ان قوانین کو پوری طرح سمجھنے کے لیے ان اصطلاحات کی صراحت ہونی چاہیئے ـ

قانون اول میں حرکت کا تخیل اور نیز قوت کا تخیل داخل ہیں، اول الذکر پر بحث کی جا چکی ہے، ثانی الذکر پر بحث کرنی ہے ـ

لفظ "قوت" عام طور پر استعمال میں آتا ہے ـ اس لفظ سے سب سے اول اعصابی قوت کا خیال وابستہ ہے مثلاً ہم کسی پتھر کو راستہ سے ہٹانے میں قوت لگاتے ہیں لیکن علمی طور پر اس لفظ کے وسیع معنے ہیں مثالاً جب دو ریل کے ڈبے ٹکراتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے پر قوت لگاتے ہیں یا ہم کہتے ہیں کہ زمین تمام اجسام پر قوت لگاتی ہے جس کی باعث وہ زمین کی جانب گرتے ہیں اِلّا آنکہ وہ اِس طرح سہارے گئے ہوں کہ اس قوت کی مزاحمت کر سکیں ـ

حرکت کا قانون اول فی الواقعی اس امر کی تصریح کرتا ہے کہ قوت سے کیا مراد ہے ـ قوت وہ ہے جو ایک جسم کی حالت سکون کو یا ایک خط مستقیم میں اِس کی یکساں حرکت کی حالت کو بدلتی ہے یا بدلنے کا میلان رکھتی ہے ـ

مثالاً ریل کے ایک ڈبے پر غور کرو جو ہموار پٹڑیوں پر ساکن کھڑا ہے ـ (۲۷) اگر ایک دوسرا ڈبہ آکر اِس سے لگے تو وہ حرکت کرنے لگیگا، اس لیے اِس پر قوت لگی ہے ـ

لیکن قانون اول سے اِس سے کچھ زیادہ ہی کا اظہار ہوتا ہے ـ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک جسم کو قوتوں کے عمل سے آزاد رکھا جائے تو وہ اپنی حالت سکون میں یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں رہے گا ـ اِس لیے کسی جسم کی طبعی حالت یہ ہونی چاہیے کہ وہ ساکن رہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کرے یعنے اِس کی رفتار یکساں ہو صرف قوت کی موجودگی ہی اِس طبعی حالت کو بدل سکتی ہے ـ

ریل کے ڈبے کی صورت پر مکرر غور کرو ـ فرض کرو کہ ٹکر سے وہ حرکت میں

آچکا ہے اور دس میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ قانون اول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک اِس پر قوتیں عمل نہیں کرتیں وہ اُسی خط مستقیم میں جس میں وہ حرکت کرنا شروع کیا تھا دس میل فی گھنٹے کی غیر متغیر رفتار سے اپنی حرکت جاری رکھے گا لیکن جب ڈبہ ٹکر سے فی الواقعی حرکت میں آتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ وہ ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت جاری نہیں رکھے گا بلکہ جلد یا بدیر ساکن ہو جائے گا۔ اِس لیے قوتیں عمل کرنی چاہئیں۔ اب ہم ان قوتوں کی نوعیت پر غور کریں گے۔

سب سے اول ہمیں ایک قوت پر غور کرنا ہوگا جو ہوا کی مزاحمت کے طور پر مشہور ہے ڈبے کے سامنے کی ہوا اِس پر سمت مخالف سے اس طور پر دباؤ ڈالتی ہے کہ اس کی حرکت میں اِبطا پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے ہوا ڈبے پر قوت لگاتی ہے عین ایسے ہی جیسے ایک شخص اپنے ہاتھ سے اِس کو سمت مخالف سے دبا کر قوت لگائے۔ صرف یہ قوت ہی ڈبے کو کسی نہ کسی وقت ٹھہرا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ بریک ڈال دئے گئے ہیں اور پہیئے اس قدر مضبوطی سے جکڑے ہوئے ہیں کہ وہ ڈبے کے لحاظ سے ساکن ہیں اور اس لیے وہ پٹڑیوں پر پھسلتے ہیں۔ اِس صورت میں ڈبے پر پٹڑیوں سے ایک بڑی قوت لگے گی اور یہ قوت بھی ڈبے کی حرکت کو روکنے کا میلان رکھے گی۔ اگر بریک نہ بھی ڈالے گئے ہوں اور پہیئے پھرنے میں آزاد ہوں تو بھی پٹڑیوں سے ایک قوت ڈبے پر لگے گی اگرچہ کہ یہ قوت پہلے کی بہ نسبت کمتر ہوگی۔

فرض کرو کہ راستہ سیدھا نہیں ہے بلکہ منحنی ہے۔ ہم تصور کر سکتے ہیں کہ حرکت کچھ وقت تک جاری رہے گی لیکن یہ حرکت اِس منحنی پر ہوگی اور وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہوگی جیسا کہ قانون اول کی بموجب ہوتی اگر قوت کا عمل نہوتا۔ پس قوت لگی ہے' یہ قوت پٹڑیوں کی وہ قوت ہے جو پہیوں کے محیط سے نکلے ہوئے حصوں (کوردں) پر لگتی ہے اور جو ڈبے کو منحنی کے گرد موڑتی ہے۔ اگر یہ حصے نہ ہوتے تو یہ قوت عمل نہ کرتی اور حرکت ایک خط مستقیم میں جاری رہتی یعنے ڈبہ پٹڑیوں پر سے اُتر جاتا۔

قانون اول کا مفہوم سمجھانے کے لیے ہم ایک اور مثال لیتے ہیں۔

فرض کرو ایک گولی بندوق سے فائر کی گئی ہے، اب ہم اس کی حرکت پر غور کریں گے۔ یہاں وہ قوتیں جو حرکت پیدا کرتی ہیں باروت کے دباؤ سے مہیا ہوتی ہیں۔ جب گولی بندوق سے نکل جاتی ہے تو یہ قوتیں اِن قوتوں کے مقابلے میں جو گولی پر عمل کرتی ہیں بہت بڑی ہوتی ہیں اس لئے گولی تقریبًا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کرتی نظر آتی ہے۔ اس حرکت کو بدلنے کا میلان رکھنے والی قوتیں دو ہیں ایک ہوا کی مزاحمت اور دوسری گولی کا وزن۔ ہوا کی مزاحمت جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں گولی کے پہلوؤں اور سروں پر دباؤ ڈالکر حرکت کو روکنے کا میلان رکھتی ہے اور گولی کا وزن اُس کو زمین کی طرف کھینچ کر لانا چاہتا ہے اور اس طرح ایک خط مستقیم مرتسم کرنے کی بجائے گولی سے ایک ایسا راستہ مرتسم کراتا ہے جو زمین کی جانب نیچے وار منحنی ہے۔ (۲۸)

۱۹ — یہ تخیل کہ کسی جسم کی طبعی حالت ایک خطِ مستقیم میں یکساں حرکت ہے یا سکون ہے (جو یکساں حرکت کی وہ مخصوص صورت ہے جبکہ رفتار صفر ہو) گیلیلو (سنہ ۱۵۶۴ تا سنہ ۱۶۴۲) سے منسوب کیا جاتا ہے۔ اِس قانون کے انکشاف کا دلچسپ ذکر "Mach's science of Mechanic's" کے باب دوم میں یا "Cox's Mechanics" کے باب نہم میں ملے گا۔ گیلیلو سے بیشتر ارسطو کی سند پر بالعموم یہ تسلیم کیا جاتا تھا کہ ہر جسم اک فطری مقام رکھتا ہے اور اس کی طبعی حالت اِس فطری مقام میں سکون کی حالت ہے۔ مثلاً یہ سمجھا جاتا تھا کہ پتھر پانی میں ڈوبتا ہے اِس وجہ سے نہیں کہ قوت جاذبہ اُس پر عمل کرتی ہے اور اُس کو نیچے وار حرکت میں لاتی ہے بلکہ اِس وجہ سے کہ اُس کا فطری مقام پانی کی تہہ ہے۔ اسی طرح یہ سمجھا جاتا تھا کہ کاگ کا فطری مقام سطح آب ہے۔ چنانچہ جیرارڈ سنہ ۱۶۳۴ء میں کہتا ہے "لاکھوں[1] اجسام ہیں جن میں سے ہر ایک اپنی اپنی جگہ پر ہے" اور جاذبہ ارض کی یہ تعریف کرتا ہے کہ یہ "[2] وہ قوت ہے جو ایک جسم اپنے مزاحم پر لگاتا ہے تاکہ اپنے مقام پر واپس آجائے۔"

---

[1] "Millions de matiers, qui sont disposees chacunes en leurs lieux."

[2] 'la force qu'une matiere demonstre a son obstacle, pour retourner en son lieu."

پس گیلیلو سے پیشتر قوت کے اثر کو یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک جسم کو اِس کے فطری مقام سے باہر رکھتی ہے۔ گیلیلو نے دیکھا کہ اجسام کے کوئی فطری مقامات نہیں ہیں بلکہ فطری حالتیں ہیں یعنے سکون کی یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی، اور قوت کا اثر کسی جسم کو اپنے فطری مقام سے حرکت دینے کا نہیں ہے بلکہ اُس کی فطری حالت میں خلل انداز ہونے کا یعنی اُس کی چال کو بدلنے کا۔ گیلیلو کا یہ انکشاف وہی ہے جو نیوٹن کے قانون اول سے ظاہر ہے۔

۲۰ — یہ طے کرنے کے بعد کہ کسی جسم کی فطری حالت سے کیا مراد ہے اور نیز قوت سے کیا مراد ہے یعنے وہ جو فطری حالت کو بدلنے کا میلان رکھتی ہے، ہم یہ دریافت کرینگے کہ وہ کونسا قانون ہے جو قوت کے پیدا کردہ اثر پر حکمران ہے۔ اگر ہمیں ایک قوت دی جائے تو یہ قوت ایک خطِ مستقیم میں یکساں حرکت کی فطری حالت کو کس قدر بدلے گی۔ اِس کا جواب قانون دوم میں ملے گا۔

قانون دوم۔ معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اُس خطِ مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جسمیں قوت عمل کرتی ہے۔

پس قوت ایک خاص مقدار یعنے جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتی ہے اور یہ قوت اِس معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح کے متناسب ہوتی ہے۔

معیار حرکت سے مراد جسم کی رفتار اور اس کی کمیت کا حاصل ضرب ہے۔ کمیت مادے کی صرف وہ مقدار ہے جس سے جسم ترکیب پایا ہے اور اس لیے کمیت جسم کی حرکت پر منحصر نہیں ہوتی۔ پس

معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح = کمیت × رفتار کی تبدیلی کی شرح

= کمیت × اسراع،

حسب تعریف اسراع۔ اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ قوت دو مقداروں کے حاصل ضرب کے

متناسب ہوتی ہے، ایک جسم کی کمیت اور دوسری اِس کا اسراع۔

۲۱ ـ کمیت کی پیمائش ـ اگر ہم کسی جسم کو اپنے ہاتھ سے چھوڑ دیں تو اس جسم پر بالعموم دو قوتیں عمل کریں گی ـ ایک ہوا کی مزاحمت اور دوسری جسم کا وزن ـ اگر ہم جسم کو خلا میں لٹکائیں اور یہ انتظام رکھیں کہ جسم کو جس لمحے پر ہم چاہیں چھوڑ سکیں تو ہوا کی مزاحمت سے نجات مل جائے گی اور جسم پر عمل کرنیوالی قوت صرف اِس کا وزن ہوگا۔ اب اگر ہم کسی دو اجسام کو خلا میں ایک دوسرے کے برابر لٹکائیں اور ٹھیک ایک ہی لمحے پر انھیں چھوڑ دیں تو معلوم ہوگا کہ وہ زمین کی جانب گرتے ہوئے پورے دقفے میں ایک دوسرے کے برابر رہتے ہیں۔ اس لیے کسی لمحہ پر اِن کے اسراع برابر ہوتے ہیں ـ

حرکت کے قانون دوم سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان اجسام پر عمل کرنیوالی قوتیں ان کی کمیتوں کے متناسب ہیں ـ یہ قوتیں جیساکہ ہم دیکھ چکے ہیں اجسام کے صرف اوزان ہیں اور چونکہ یہ تجربی نتیجہ درست رہتا ہے خواہ اجسام کوئی ہوں اس لیے حسب ذیل عام قانون حاصل ہوتا ہے:۔

اجسام کی کمیتیں اِن کے اوزان کے متناسب ہوتی ہیں۔

اِس قانون سے ہم کسی دو جسموں کی کمیتوں کا مقابلہ کرسکتے ہیں۔ (۳۰)
ہر ملک میں ایک خاص کمیت کو معیار کے طور پر منتخب کیا جاتا ہے اور کسی دوسرے جسم کی کمیت کا اِس معیار سے یا اس کی نقل سے مقابلہ کیا جاتا ہے۔ اور اس طریقہ سے ہم کسی جسم کی حقیقی کمیت کا علم حاصل کرتے ہیں۔ مثلاً جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک جسم کی کمیت ن پاؤنڈ ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس کی کمیت (یا وزن) لندن میں رکھے ہوئے ایک خاص معیاری جسم کی کمیت (یا وزن) کا

ن گنا ہے۔

۲۲۔ قوت کی پیمائش ۔ ایک اکائی کمیت کا وزن وہ قوت ہے جسے ایک اکائی قوت کو تعبیر کرنے کے لیے اختیار کیا جا سکتا ہے اور ایسا کیا جائے تو تمام دیگر قوتوں کا مقابلہ اِس قوت سے ہو سکتا ہے۔ مثلاً م پونڈ وزن کی قوت سے ایسی قوت مراد ہوگی جو معیاری پونڈ کے وزن سے م گُنی بڑی ہے۔

قوت کی یہ اکائی علمی نہیں ہے بلکہ سہولت بخش ہے، علمی اس وجہ سے نہیں کہ وہ بدلتی ہے جبکہ کمیت کو زمین کی سطح پر مقام بمقام لے جایا جاتا ہے چنانچہ ایک پونڈ کی کمیت کا وزن لندن میں واشنگٹن کی بہ نسبت زیادہ ہوگا، اس لیے اگر ایک پونڈ کے وزن کو قوت کی اکائی متصور کیا جائے تو ہمیں یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ قوت کی یہ اکائی زمین کی سطح کے مختلف مقامات پر مختلف ہوگی اور لندن میں م پونڈ وزن کی قوت واشنگٹن میں م پونڈ وزن کی قوت سے مختلف ہوگی۔

یہی وجہ ہے کہ علمی مقاصد کے لیے قوت کی ایک دوسری اکائی بالعموم استعمال کی جاتی ہے۔ اس کو قوت کی مطلق اکائی کہتے ہیں اور وہ ایسی منتخب کی جاتی ہے کہ اُس کا انحصار زمین کی سطح کے کسی مقام پر نہیں ہوتا۔ قوت کی اس دوسری اکائی کی تعریف یہ ہے کہ وہ اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے، برخلاف اس کے قوت کی قبل الذکر اکائی ایسا اسراع پیدا کرتی ہے جو اُس نقطہ پر جاذبۂ ارض کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے۔ پس اگر جاذبہ ارض کی قیمت یعنے کسی جسم کا اسراع جبکہ جسم خلا میں آزادانہ گر رہا ہو ج ہو تو علمی اکائی، مطلق اکائی کا ج گنا ہے۔

اگر اکائی قوت، اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرے تو قوت ق، کمیت ک میں اسراع $\frac{\text{ق}}{\text{ک}}$ پیدا کرے گی۔ اس لیے اسراع کو

ع سے تعبیر کیا جائے، تو حسب ذیل بنیادی مساوات حاصل ہوگی:

ق = ک ع .... (۱۰)

یہ مساوات نیوٹن کے قانون دوم کو ریاضی کی زبان میں ادا کرتی ہے (۳۱)
یہاں قوت ق کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کرنا چاہیئے۔

۲۳ - قانون سوم - ہر عمل کے جواب میں ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے۔

یہ عام مشاہدہ کی بات ہے کہ کوئی جسم ا کسی دوسرے جسم ب پر قوت نہیں لگا سکتا تا آنکہ ب بھی اُسی وقت ا پر قوت نہ لگائے۔ مثلاً جب کوئی پہلوان لوہے کے ایک بڑے گولے کو پھینکتا ہے تو اُسے ہوشیار رہنا چاہیئے کہ کہیں گولہ اُسے نہ گرادے، جب وہ گولے پر قوت لگاتا ہے تو اس کے ساتھ ہی گولہ اُس پر قوت ڈالتا ہے اور اس لیے اُسے چاہیئے کہ اس قوت کے اثرات کا مقابلہ کرنے کے لیے تیار رہے۔ اسی طرح جب بندوق گولی پر قوت ڈال کر اسے فائر کرتی ہے تو گولی بھی بندوق پر قوت لگاتی ہے جس کا اظہار بندوق کے پیچھے ہٹنے سے یا دھکہ دینے سے ہوتا ہے۔ پس تمام قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور انہیں بہ سہولت تمام عمل اور تعامل کہا جا سکتا ہے۔ حرکت کا قانون سوم یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایسی کوئی دو قوتیں مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہوتی ہیں۔

قانون سوم کا مفہوم اُس تعامل کا امتحان کرنے پر معلوم ہوگا جو ان قوتوں کے جواب میں ہیں جن کو ہم قبل ازیں تمثیلاً استعمال کر چکے ہیں پہلی مثال دو ریلوے ڈبوں کے درمیان ٹکر کی ہے۔ ڈبہ ا، ڈبہ ب سے ٹکراتا ہے جس کی وجہ سے ڈبہ ب پر قوت لگتی ہے اور وہ حرکت میں آتا ہے۔ قانون سوم سے معلوم ہوتا ہے کہ ٹکر کے لمحہ پر ب کو ا پر قوت لگانی چاہیئے، یہ قوت مقدار میں اُس قوت کے مساوی ہوگی جو ا، ب پر لگاتا ہے

لیکن وہ سمت میں مخالف ہوگی۔ تعامل کی یہ قوت صرف ٹکر کے لمحہ میں عمل کرے گی اور اس قوت کا نتیجہ ا کی رفتار کی تبدیلی کی صورت میں ظاہر ہوگا چنانچہ یہ قوت یا تو ا کی حرکت کو صرف روک دے گی اور اس لیے ا ٹکر کے بعد تخفیف شدہ رفتار سے آگے بڑھے گا یا وہ ا کی حرکت کو الٹا دے گی اور اس لیے ا، ب سے ٹکرانے کے بعد جس سمت سے آیا تھا اُسی سمت میں واپس ہوگا۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب ب حرکت میں آچکتا ہے تو اس پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں :-

(ا) ہوا کی مزاحمت،

(ب) پٹڑیوں کی رگڑ،

(ج) پہیئے کے کوروں پر پٹڑیوں کا دباؤ، جو ڈبہ کو منحنی کے گرد موڑتا ہے۔

وہ تعامل جو پہلی قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ اپنے سامنے اور قریب کی ہوا پر لگاتا ہے جس کی وجہ سے یہ ہوا اُس سمت میں حرکت کرتی ہے جس میں ڈبہ متحرک ہے۔ فی الحقیقت یہی وہ قوت ہے جو اُس فضا سے ہوا کو خارج کرتی ہے جو کسی لمحہ پر ڈبہ اختیار کرتا ہے۔

وہ تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے ساتھ پٹڑیوں کو بھی کھینچ کر لیجانے کا میلان رکھتی ہے۔ لیکن پٹڑیاں چونکہ استوار طور پر نیچے جکڑی ہوئی ہوتی ہیں اس لیے یہ قوت عملاً کوئی حرکت پیدا نہیں کر سکتی۔ (۳۲)

وہ تعامل جو تیسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے پہیوں کی کوریں منحنی کی بیرونی پٹڑی پر لگاتی ہیں۔ پٹڑیاں ان کوروں کو اُس سمت میں دباتی ہیں جو منحنی کے مرکزی جانب ہے اور اس لیے یہ کوریں پٹڑیوں کو اس منحنی کے مرکز سے پرے، اور بیرونی جانب دباتی ہیں۔ اگر پٹڑیاں اچھی طرح ثابت نہ کی گئی ہوں تو یہ دباؤ انہیں متذکرہ بالا سمت میں متحرک کرے گا، پٹڑیاں "پھیل" جائیں گی اور ڈبہ

پٹڑیوں سے اُتر جائے گا۔

گولی کی مثال میں بھی گولی پر عمل کرنے والی تین قوتیں ہیں:

(ا) بارود کا دباؤ، گولی نالی سے نکلنے کے پیشتر،

(ب) ہوا کی مزاحمت، گولی کی پرواز کی اثنا، میں،

(ج) گولی کا وزن جو اُسے نیچے وار زمین کی طرف کھینچتا ہے۔

وہ تعامل جو پہلی قوت کے متناظر ہے گولی کا وہ دباؤ ہے جو بارود کو پیچھے ڈھکیلتا ہے۔ یہ دباؤ اپنی باری پر بندوق پر منتقل ہوتا ہے جس سے بندوق کا دھکہ پیدا ہوتا ہے۔

دو تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے ہوا کو حرکت میں لاتا ہے (جیسا کہ ہم ڈبہ کی صورت میں دیکھ چکے ہیں) اور گولی کے لیے راستہ بناتا ہے اور اُس ہوا میں حرکت پیدا کرتا ہے جو گولی کی پرواز کا ساتھ دیتی ہے۔

وہ تعامل جو تیسری قوت یعنے گولی کے وزن کے متناظر ہے زیادہ دلچسپ ہے کیونکہ اس کے وجود کے متعلق کوئی راست شہادت حاصل نہیں ہوسکتی۔ ہم فطرت کی یکسانیت کے اصول سے ہی یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ چونکہ ہر اُس صورت میں جو کبھی آزمائی جا چکی ہے عمل کے ساتھ ہمیشہ ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے اس لیے اس صورت میں بھی جو مشابہ ہے لیکن اسے آزمایا نہیں جا سکتا ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عمل کے ساتھ مساوی اور مخالف تعامل ہے۔

وہ قوت جس کا ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں گولی کا وزن ہے جو اُسے زمین کی جانب کھینچتا ہے۔ یہ قوت یقیناً اُس قوت کو تعبیر کرتی ہے جو زمین خود گولی پر لگاتی ہے یعنی قوت جاذبہ، اِس قوت کے ساتھ اِس کا تعامل ہونا چاہئے۔ اس لیے گولی زمین پر ایک ایسی قوت سے عمل کرنی چاہئے جو گولی کے وزن کے مساوی ہو، یہ قوت زمین کو اوپر وار گولی کی جانب کھینچے گی۔ گولی زمین پر جو قوت لگاتی ہے وہ قانون سوم کی رو سے عین اتنی ہی بڑی ہے جتنی زمین گولی پر لگاتی ہے۔ لیکن گولی کی وجہ سے زمین میں جو اوپر وار اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اُس نیچے وار اسراع سے بہت ہی کم ہے جو زمین گولی میں

پیدا کرتی ہے، کیونکہ قوت جس جسم پر عمل کرتی ہے اُس کی کمیت اور اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے اور چونکہ گولی کی کمیت کے مقابلہ میں زمین کی کمیت بہت بڑی ہے اس لیے زمین کا اسراع گولی کے اسراع کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہوگا۔

اگرچہ ان وجوہ کی بناء پر اُس اسراع کا راست مشاہدہ نہیں کیا جا سکتا جو زمین میں اِس کے اوپر متحرک گولی کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے تاہم بالکل اِسی کے مشابہ ایک صورت ہے جس میں اس کا راست مشاہدہ ہو سکتا ہے۔

(۲۳) چاند پر جو زمین کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جاذبہ ارض بالکل اُسی طریقہ سے عمل کرتا ہے جس طریقہ سے وہ گولی پر کرتا ہے۔ اگر چاند پر کوئی قوت عمل نہ کرتی تو وہ ایک خط مستقیم مرتسم کرتا، لیکن واقعہ یہ ہے کہ وہ مسلسل زمین کی جانب جاذبہ کی اُسی قوت سے کھنچتا ہے جو گولی کو کھینچتی ہے۔ پس بالکل اُسی طرح زمین میں بھی چاند کی جانب اسراع پیدا ہونا چاہئیے۔ یہ اسراع ایسا ہے کہ اس کا مشاہدہ علم ہیئت کے ذریعہ کیا جا سکتا ہے۔

۲۴ — اُن خیالات کا لحاظ کرتے جن کی تفہیم اوپر کی جا چکی ہے حرکت کے متذکرہ تین قوانین کو مکرر شکل ذیل میں بیان کیا جا سکتا ہے:

۱۔ کسی جسم کی طبعی حالت عدم اسراع کی ہوتی ہے۔ اِس طبعی حالت سے گریز قوت کے عمل سے پیدا ہوتا ہے۔

۲۔ جب کوئی قوت عمل کر کے ایک جسم کی طبعی حالت میں خلل ڈالتی ہے تو یہ قوت جسم کی کمیت اور پیدا شدہ اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

۳۔ قوتیں جوڑوں میں واقع ہوتی ہیں، ہر عمل کے ساتھ ایک تعامل ہوتا ہے اور قوتوں کا ہر زوج مساوی اور مخالف ہوتا ہے

حوالے کا فریم

۲۵ — قوانین حرکت کے بیان کرنے میں ہم نے جسم کی حرکت کا ذکر حوالے کے اُس فریم کی تخصیص کئے بغیر کیا ہے جس کے لحاظ سے اس حرکت کی پیمائش ہونی چاہیئے۔ بالعموم حرکت کی پیمائش عمل میں زمین کی سطح کے لحاظ سے کی جاتی ہے۔ نیوٹن کو یقین تھا کہ ایک ایسے حوالے کے فریم کا تصور کرنا جو فضاء میں فی الواقعی ثابت ہو ممکن ہے، وہ تمام حرکت کو اس فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنے کا مشورہ دیتا ہے۔ چنانچہ نیوٹن کے قوانین حرکت کا اطلاق اُس حرکت پر ہوتا ہے جو فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو حالانکہ تمام مسئلوں میں اِلّا اُن مسئلوں کے جو علم ہیئت سے متعلق ہیں ہمیں اُن قوانین حرکت کے جاننے کی ضرورت ہے جو زمین کے ساتھ حرکت کرنے والے محوروں کے حوالے سے بیان کئے گئے ہوں۔

اول ہم یہ معلوم کریں گے کہ حرکت کو اُن محوروں کے ایک جٹ کے حوالہ سے بیان کرنے کا کیا اثر ہوگا جو فضاء میں یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک جسم جو کسی قوتوں کے زیر عمل نہ ہو فضاء میں کوئی اسراع نہیں رکھیگا اور اس لیے وہ متحرک محوروں کے لحاظ سے کوئی اسراع نہیں رکھیگا کیونکہ خود محاور فضاء میں اسراع نہیں رکھتے۔ نیز کسی اسراع کی وہی قیمت ہوگی خواہ اُس کا حوالہ فضاء کے ثابت محوروں سے دیا جائے یا متحرک محوروں سے، (۳۴)
کیونکہ وہ اسراع جو متحرک محوروں کے حوالے سے پیمائش کیا گیا ہو حاصل ہوگا اگر ہم فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کو فضاء کے متحرک محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کے ساتھ مرکب کریں لیکن یہ آخری اسراع صفر ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ قوانین حرکت ٹھیک وہی شکل رکھتے ہیں جبکہ حرکت اُن محوروں کے حوالے سے بیان کی گئی ہو جو فضاء میں

حرکت کرتے ہیں بشرطیکہ یہ محورہ عدم اسراع کے ساتھ حرکت کریں۔ عدم اسراع کی یہ شرط ان محوروں کے جٹ سے پوری نہیں ہوتی جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں۔ زمین کی سطح کا کوئی نقطہ زمین کی گردش کی وجہ سے اس کے محور کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اگر اس دائرہ کا نصف قطر ا ہو اور و وہ رفتار ہو جس سے یہ دائرہ مرتسم ہوا ہے تو نقطہ کا اسراع زمین کے محور کی جانب حسب دفعہ ۱۲، $\frac{و^2}{ا}$ ہوگا۔ اس لیے محوروں کے کسی جٹ کا اسراع جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں $\frac{و^2}{ا}$ ہوگا اور قوانین حرکت کے اطلاق میں اس کا خیال رکھنا ہوگا۔ خط استوا کے کسی نقطہ پر و = ۴۶۵۱۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ اور ا = ۶۳۷ × ۱۰^۶ سینٹی میٹر، اس لیے اسراع = $\frac{و^2}{ا}$ = ۳٫۴ سینٹی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ۔ اگر کسی جسم کو خط استوا پر گرایا جائے تو اس کا اسراع ۹۷۸٫۱ سینٹی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ معلوم ہوگا جبکہ حرکت کا حوالہ زمین کے ثابت محوروں سے دیا جائے، لیکن اس کے اصلی اسراع کی مقدار

۹۷۸٫۱ + ۳٫۴ = ۹۸۱٫۵

ہو گی جبکہ حرکت کا حوالہ فضا کے ثابت محوروں سے دیا جائے۔

اس سے اُس علت کے ایک جزو کی صراحت ہوتی ہے کہ کیوں جاذبہ ارض زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ متغیر نظر آتا ہے۔ ایک کیلو گرام کی کمیت کا وزن قطب شمالی پر پیچ دار ترازو کے پیچ کو ایک خاص طول تک کھینچیگا۔ اگر اس ترازو کو خط استوا پر منتقل کیا جائے تو وزن کا ایک حصہ، زمین کے مرکز کی جانب کمیت کا جو اسراع ہے اُس کے پیدا کرنے میں صرف ہوگا اور صرف بقیہ حصہ ہی پیچ کو کھینچنے میں کام آئے گا۔ پہلا حصہ تقریباً ۳$\frac{1}{2}$ گرام کا وزن ہے

اور دوسرا تقریباً $\frac{1}{2}$ ۹۹۶ گرام کا وزن۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ زمین کے مرکز کی جانب زمین کی سطح کا جو اسراع ہے اُس کی وجہ سے خط استوا پر ایک کیلو گرام کی کمیت پیچ دار ترازو پر ایک ایسی قوت سے عمل کرتی معلوم ہو گی جو صرف $\frac{1}{2}$ ۹۹۶ گرام پر زمین کی کشش کے مساوی ہو گی۔ (۳۵)

حرکت کا حوالہ زمین کی سطح پر کے محوروں کے ذریعہ دینے میں خطاؤں کا ایک اور جُٹ داخل ہو گا، یہ خطائیں محوروں کی سمتوں میں تبدیلی ہونے سے پیدا ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر ہم قوانین حرکت کو استعمال کریں یہ فرض کر کے کہ وہ زمین کی سطح کے ثابت محوروں کے حوالہ سے درست ہیں اور ان کا اطلاق ایک پتھر کے گرنے پر کریں تو ہم دیکھیں گے کہ پتھر زمین کی سطح کے ایک ایسے نقطہ پر لگنا چاہئے جو انتصاباً اُس نقطے کے نیچے ہے جس سے وہ گرایا گیا ہے۔ اگر ہم زمین کی گردش کی رعایت رکھیں تو معلوم ہو گا کہ وہ نقطہ جس پر پتھر فی الواقعی ضرب لگاتا ہے اُس نقطہ کے کچھ مشرق میں ہونا چاہیئے جو انتصاباً اُس نقطے کے نیچے ہے جہاں سے وہ چلا تھا۔

اگر زمین پر کی حرکت کو وہ حرکت سمجھ کر استعمال کیا جائے جو فضا کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو تو اس کی وجہ سے جو خطائیں داخل ہوں گی وہ بالعموم یا تو بہت ہی چھوٹی ہوتی ہیں یا بہت آسانی سے درست کی جا سکتی ہیں۔ اس لیے ہم ایسی خطاؤں کو فی الحال بالکل نظر انداز کر کے آگے بڑھیں گے اور حرکت پر قوانین حرکت کا اطلاق زمین کی سطح کے حوالے سے کریں گے۔

قوانین حرکت صرف ایک ذرہ کی حرکت پر اطلاق پذیر ہیں۔

۲۶ ۔ قوانین نیوٹن کی تکمیل میں ایک اور قید ہے جسے یہاں سمجھ لینا

چاہیئے۔ قانون دوم سے شاید ہم یہ فرض کر لیں کہ کسی جسم پر عمل کرنے والی قوت اور جسم کی کمیت کا علم ہو جانے سے ہم جسم کا ایک معین اسراع اخذ کر سکتے ہیں۔ اگر جسم محدود جُثّے کا ہے تو اس کے مختلف نقطوں پر اسراع مختلف ہوگا۔ مثلاً ہم دیکھ چکے ہیں کہ زمین کی گردش کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ خط استوا پر کے ایک نقطہ کا اسراع قطب شمالی پر کے ایک نقطہ کے اسراع سے مختلف ہوتا ہے۔ پھر وہ کونسا اسراع ہے جو قانون دوم سے متعین ہوتا ہے؟

اس مشکل کا جواب یہ ہے کہ قانون دوم کو صرف ذرات پر یعنی مادے کے اس قدر چھوٹے ٹکڑوں پر اطلاق پذیر سمجھنا چاہیئے جنہیں نقطے سمجھا جا سکتا ہے۔ ایک متحرک ذرہ کا ایک واحد معین اسراع ہوگا عین ایسے ہی جیسے ایک متحرک نقطہ کا ہوتا ہے۔ اس قانون کو ذروں پر استعمال کرکے ہم وہ قوانین اخذ کر سکیں گے جو محدود جُثّے کے اجسام پر اطلاق پذیر ہیں۔ اس مسئلہ پر کسی آئندہ باب میں بحث کی جائے گی۔ لیکن جہاں یہ ظاہر ہے کہ اس قانون کو سختی کے ساتھ ذروں پر استعمال کرنا چاہیئے وہاں یہ بھی ظاہر ہے کہ بہت سے ایسے مسئلے ہو سکتے ہیں جس میں ہم محدود جُثّوں کے اجسام کو ذروں کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں اور اس سے کوئی قابل قدر خطا پیدا نہیں ہوگی۔ (۳۶) ایسی صورت پیدا ہوئی تھی جب ہم نے دفعہ ۱۸ میں بندوق کی گولی پر بحث کی تھی۔ گولی کے جُثّے کی بحث اثنائے سوال میں پیدا ہی نہیں ہوئی کیونکہ ہم گولی کے تمام نقطوں کا ایک ہی اسراع تصور کر سکتے ہیں۔ اسی طرح بہت سی صورتیں وقوع پذیر ہوں گی جن میں ہم محدود جُثّے کے جسم کو اس طرح استعمال کریں گے گویا کہ وہ ایک ذرہ ہے۔ آئندہ باب میں ذروں پر اور ان اجسام پر قوتوں کے عمل سے بحث کی جائے گی جن کو ہم ذروں کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں۔

تیسرا باب (۳۷)

واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں

قوتوں کی ترکیب اور تحلیل

۲۷ — حرکت کے قانون دوم سے ہم وہ اسراع معلوم کر سکتے ہیں جو پیدا ہوتا ہے جبکہ معلومہ کمیت کے ایک ذرہ پر ایک معلومہ قوت عمل کرتی ہے۔

مثلاً بندوق کی گولی کی پرواز پر غور کرو جو دفعہ ۱۸ میں زیر بحث آ چکی ہے۔ جب تک گولی ہوا میں رہتی ہے اُس پر دو قوتیں ایک ساتھ عمل کرتی ہیں، ایک گولی کا وزن اور دوسری ہوا کی مزاحمت۔ ان کے علاوہ باد مخالف چل سکتی ہے جو گولی پر ایک افقی دباؤ اُس کی حرکت کی عمودوار سمت میں ڈالے گی۔ ہوا کی مزاحمت گولی کی حرکت میں ابطاء پیدا کرتی ہے یعنی اُس سمت کے خلاف اسراع پیدا کرتی ہے جس میں گولی حرکت کر رہی ہے۔ گولی کا وزن اُسے نیچے کھینچتا ہے یعنی زمین کی جانب اسراع پیدا کرتا ہے۔ باد مخالف گولی کو اُس کے راستہ سے ہٹا دے گی یعنے اُس سمت میں اسراع پیدا کرے گی جس میں وہ چل رہی ہے۔ پس ہم ان تین قوتوں کے متعلق یہ سمجھ سکتے ہیں کہ ہر ایک اپنا اپنا اسراع پیدا کر رہی ہے۔ یہ تین اسراع حرکت کے قانون دوم سے جدا جدا محسوب ہو سکتے ہیں اور پھر ان تین

اسراعوں کو مُرکب کر کے ہم گولی کا حاصل اسراع معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ حاصل اسراع ایک خاص واحد قوت سے پیدا کیا جا سکتا تھا اور اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ واحد قوت، اسراع پیدا شدہ کا لحاظ کرتے متذکرہ بالا تین مختلف قوتوں کے اجتماع کے معادل ہے یعنے یہ واحد قوت ان تین مختلف قوتوں کا حاصل ہے۔ اب ہم ان خیالات کو ریاضی کی ٹھیک شکل میں بیان کریں گے۔ اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ قوت، مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہے اور اس لیے اس کو ایک خط مستقیم سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ ہم ثابت کریں گے کہ قوتوں کو متوازی الاضلاع کے قانون کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔ (۳۸) اس کو ثابت کر دینے کے بعد یہ نتیجہ نکلیگا کہ قوتیں سمتیاں ہیں اور انہیں اُن عام قاعدوں کی بموجب تحلیل اور مرکب کیا جا سکتا ہے جو بیان کئے جا چکے ہیں۔

۲۸ ۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع ۔ مسئلہ ۔ اگر دو قوتیں مقدار اور سمت میں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر ہوں تو انکا حاصل اس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوگا۔

فرض کرو کہ یہ دو قوتیں، اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ اب، اج سے وہ اسراع تعبیر ہوتے ہیں جو پیدا ہوتے اگر وہ کسی ذرہ پر جداگانہ عمل کرتیں۔ چونکہ حرکت کے قانون دوم کی رو سے اسراع قوت کے متناسب ہوتا ہے اس لیے

اب : اج = اب : اج

متوازی الاضلاع اب ج د اور اب ج د بناؤ۔

اُس تناسب کی وجہ سے جو اوپر ابھی حاصل ہو چکا ہے یہ دو متوازی الاضلاع متشابہ ہوں گے اور اس لیے ا د ا د ایک خط مستقیم

ہوگا اور حاصل ہوگا

ا د : ا د = ا ب : اب

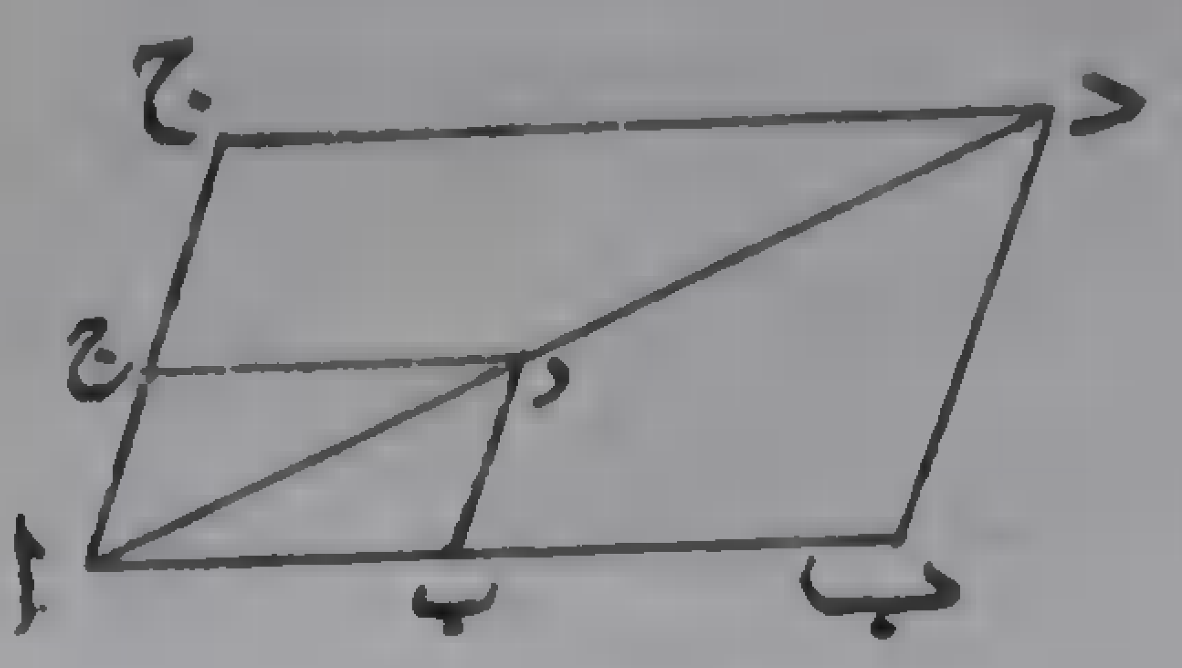
لیکن ا د جو کناروں

اب، اج کے متوازی الاضلاع

کا وتر ہے حاصل اسراع کو

تعبیر کرتا ہے۔ اب چونکہ

اب اُس قوت کو تعبیر



شکل (۱۵)

کرتا ہے جو اسراع اب پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے اس لیے محصلہ بالا تناسب سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا د، اُس قوت کو تعبیر کرے گا جو اسراع ا د پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے۔ بہ الفاظ دیگر ذرہ کا اسراع وہی ہے جو ہوتا اگر اس پر ایک واحد قوت جو ا د سے تعبیر ہوتی ہے عمل کرتی۔ اس لیے قوتوں اب، اج کے حاصل کو ا د تعبیر کرتا ہے۔

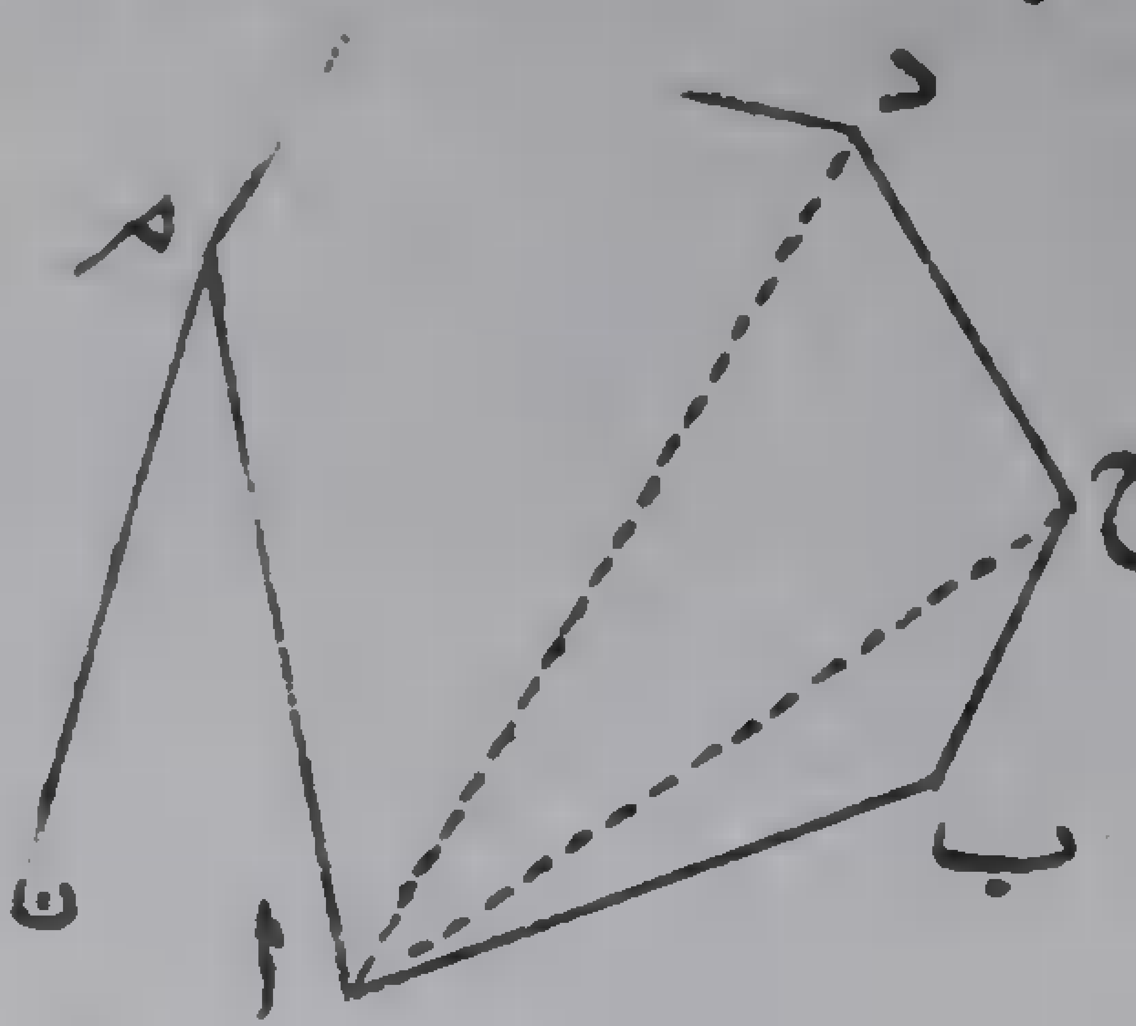
اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوت ایک سمتی ہے اور اس لیے قوتیں اُن قوانین کی بموجب جو دفعات ۱۴ تا ۱۶ میں بیان کئے جا چکے ہیں مرکب کیجا سکتی ہیں۔

ذرہ توازن میں

۲۹ — سکونیات میں ہمیں صرف ساکن ذرات یا ساکن ذرات کے نظامات سے بحث کرنی ہوتی ہے۔ اس لیے ہر ذرہ پر حاصل قوت صفر ہونی چاہیئے۔ اس لیے اُن صورتوں پر غور کرنا اہم ہے جن میں قوتوں کے کسی نظام کا حاصل صفر ہوا کرتا ہے۔

۳۰ — **قوتوں کا کثیر الاضلاع مسئلہ**۔ اگر ایک ذرہ پر عمل کرنیوالی قوتیں (۳۹)
خطوط مستقیم سے تعبیر کیگئی ہوں تو یہ قوتیں توازن میں ہونگی اگر وہ کثیر الاضلاع جو اِن تمام

خطوط مستقیم کو کناروں کے طور پر لینے سے بنے ایک بند کثیر الاضلاع ہو یعنی اگر ان تمام خطوط مستقیم کو سرا بہ سر رکھنے کے بعد ہم ابتدائی نقطہ پر واپس لوٹ آئیں ۔



شکل (۱۶)

فرض کرو کہ قوتوں کی کوئی تعداد جو ایک ساتھ ایک ذرہ پر عمل کرتی ہیں خطوط مستقیم ا ب، ب ج، ج د، ....، م ن سے تعبیر کی گئی ہیں۔ چونکہ قوت ایک سمتی ہے اسلیے وہ قوتیں جو ا ب اور ب ج سے تعبیر ہوتی ہیں ایک واحد قوت کے مماثل ہیں جو ا ج سے تعبیر ہوتی ہے اور اسلئے اِن دو قوتوں کی بجائے یہ قوت رکھی جا سکتی ہے ۔

اس لیے قوتوں کا دیا ہوا نظام اب اُن قوتوں کا نظام سمجھا جا سکتا ہے جو خطوط مستقیم ا ج، ج د، ....، م ن سے تعبیر ہوتی ہیں ۔ پھر اِن میں سے پہلی دو قوتوں کی بجائے ایک واحد قوت جو ا د سے تعبیر ہوتی ہے رکھی جا سکتی ہے اور قوتوں کا دیا ہوا نظام اُن قوتوں میں تحویل ہوتا ہے جو ا د، د ع، ....، م ن سے تعبیر ہوتی ہیں ۔ اس طرح ہم اس عمل کو جاری رکھ سکتے ہیں تا آنکہ ہم اس واحد قوت پر پہنچ جائیں جو ا ن سے تعبیر ہوتی ہے۔ اس لیے یہ قوت تمام قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرتی ہے ۔

اگر کثیر الاضلاع ایک بند کثیر الاضلاع ہے تو نقطے ا اور ن منطبق ہوں گے اور اس لیے حاصل قوت جو ا ن سے تعبیر ہوتی ہے معدوم ہو گی اور ذرہ توازن میں ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ذرہ توازن میں ہو تو ا ن معدوم ہو گا اور اس لیے کثیر الاضلاع ایک بند کثیر الاضلاع ہو گا ۔

پس توازن کی وہ شرط جو ثابت شدہ مسئلہ میں مندرج ہے ضروری اور کافی ہے ۔ ضروری اس وجہ سے کہ یہ شرط پوری

ہونی چاہیے اگر ذرہ کو توازن میں ہونا ہے اور کافی اس وجہ سے کہ توازن کا یقین ہو جاتا ہے جوں ہی یہ شرط پوری ہو جاتی ہے۔

۳۱ ۔ قوتوں کا مثلث ۔ اگر صرف تین قوتیں ہوں تو مسئلہ بالا ایک سادہ تر مسئلہ میں تحویل ہوتا ہے، یہ مسئلہ **قوتوں کے مثلث** کے طور پر مشہور ہے اور حسب ذیل ہے :

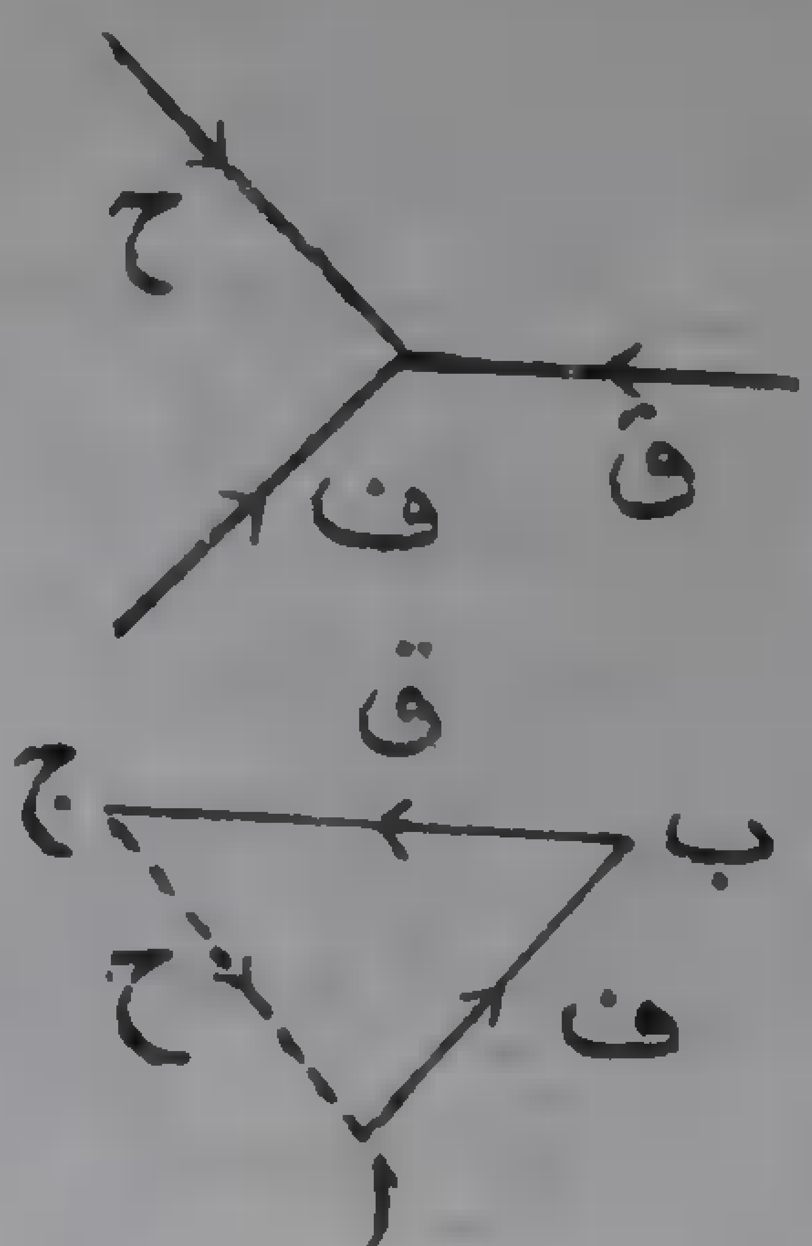
مسئلہ ۔ اگر ایک ذرہ پر تین قوتیں جو خطوط مستقیم سے تعبیر کیگئی ہوں عمل کریں تو ذرہ توازن میں ہوگا اگر یہ تین خطوط مستقیم ایک مثلث کے اضلاع بنیں جبکہ انہیں سرا بہ سرا رکھا جائے ۔

یہ مسئلہ چونکہ **قوتوں کے کثیر الاضلاع** کی ایک مخصوص صورت ہے اس لیے کسی جداگانہ ثبوت کی ضرورت نہیں ہے ۔ حسب سابق اس کا عکس بھی درست ہے، اس لیے مسئلہ میں بیان کی ہوئی شرط توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے۔ (۴۰)

جب صرف تین قوتیں عمل کر رہی ہوں تو توازن کی شرط کو اس سے بھی زیادہ سادہ شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے ۔

۳۲ ۔ لامی کا مسئلہ ۔ جب ایک ذرہ تین قوتوں کے زیر عمل ہو تو توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ یہ تین قوتیں ایک مستوی میں ہوں اور ہر ایک قوت اُس زاویہ کی جیب کے متناسب ہو جو دوسری دو قوتوں کے درمیان ہے ۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ تین قوتوں ف، ق، ح کے زیر عمل ہے۔



شکل (۱۷)

توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہم تین خطوں کو جو مقدار اور سمت میں قوتوں ف، ق، ح کو تعبیر کریں سرا بہ سرا رکھکر ایک مثلث بنا سکیں۔ فرض کرو کہ ا ب، قوت ف کو تعبیر کرتا ہے۔ اس کے سرے ب پر ایک خط ب ج جو قوت ق کو تعبیر کرے لگاؤ۔ اِس لیے ج ا سے قوت ح تعبیر ہونی چاہئے اگر توازن کی شرطوں کو پورا ہونا ہے۔ اِس لیے یہ تین قوتیں ایک مستوی میں ہونی چاہئیں یعنے اُس مستوی میں جو قوتوں کے نقطہ عمل میں سے گذرے اور ا ب ج کے متوازی ہو۔

مان لو کہ توازن ہے تو تین قوتیں مثلث ا ب ج کے اضلاع سے تعبیر ہوں گی۔ فرض کرو کہ اِس مثلث کے اضلاع حسب معمول ا، ب، ج سے اور زاوے ا، ب، ج سے تعبیر کئے گئے ہیں۔ تب مثلث کی ایک معلومہ خاصیت کی رو سے

$$\frac{ا}{جب\ ا} = \frac{ب}{جب\ ب} = \frac{ج}{جب\ ج}$$

لیکن ہمارے عمل کی بمو جب ا، ب، ج، قوتوں کی مقداروں کے متناسب ہیں، اس لیے

$$\frac{ج}{ف} = \frac{ب}{ح} = \frac{ا}{ق}$$

اس لیے

$$\frac{ف}{جب\ ج} = \frac{ق}{جب\ ا} = \frac{ح}{جب\ ب}$$

(۴۱) اگر (ف ق) سے وہ زاویہ تعبیر کیا جائے جو قوتوں ف اور ق کے خطوط عمل کے درمیان ہے تو (ف ق) = π − ب ، اِس لیے جب ب = جب (ف ق) اور اس لیے

$$\frac{ف}{جب\ (ق\ ح)} = \frac{ق}{جب\ (ح\ ف)} = \frac{ح}{جب\ (ف\ ق)} \quad \ldots (11)$$

اِس مسئلہ کا عکس درست ہے کیونکہ اگر ربط (۱۱) پورا ہو اور اگر قوتوں کے خطوط عمل ایک مستوی میں ہوں تو ہم ایک مثلث بنا سکتے ہیں جس کے اضلاع قوتوں ف، ق، ح کو تعبیر کرینگے اور اس لیے توازن ہوگا۔

۲۳۔ توازن کے لیے تحلیلی شرطیں

۔ اگر توازن کی شرطوں کو تحلیلی شکل میں بیان کیا جائے تو توازن کی شرط یہ ہے کہ تمام عاملہ قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہئے۔ اگر قوتیں انفرادی طور پر معلوم ہوں تو حاصلِ قوت سمتیوں کو مرکب کرنے کے قاعدوں سے جو دفعات ۱۴ تا ۱۶ میں بیان ہو چکے ہیں فوراً معلوم کی جا سکتی ہے۔

اگر قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں عمل کرتی ہیں تو فرض کرو کہ اِن کی مقداریں $ح_1$، $ح_2$، ....، $ح_ن$ ہیں اور فرض کرو کہ اِن کے خطوط عمل محور لا کے ساتھ زاویے $صہ_1$، $صہ_2$، ....، $صہ_ن$ بناتے ہیں۔ تب حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہوں گے جہاں (دیکھو دفعہ ۱۴)

$$لا = ح_1\ جم\ صہ_1 + ح_2\ جم\ صہ_2 + \ldots\ldots$$

$$ما = ح_1\ جب\ صہ_1 + ح_2\ جب\ صہ_2 + \ldots\ldots$$

حاصل کی مقدار $\sqrt{لا^2 + ما^2}$ ہے اور وہ معدوم ہوگا صرف اگر لا اور ما جداگانہ معدوم ہوں۔ اس لیے توازن کے لیے شرط یہ ہے کہ

محوروں کے متوازی یہ اجزائے ترکیبی جداگانہ معدوم ہوں یعنی عمل کرنیوالی مختلف قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو جبکہ انہیں ہر ایک محور کے متوازی تحلیل کیا گیا ہو۔

اسی طرح جب قوتیں سب کی سب ایک سطح مستوی میں عمل نہیں کرتیں تو توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ قصار کے تین محوروں کی سمتوں میں اِن قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعے جدا جدا معدوم ہوں۔

مثالیں

(۴۲) ۱۔ ۲ اور ۸ پونڈ وزن کی دو قوتیں دو سمتوں میں جو علی القوائم ہیں عمل کرتی ہیں اِن کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔

۲۔ تین قوتیں ہر ایک ف کے مساوی تین قائم محوروں پر عمل کرتی ہیں اِن کا حاصل معلوم کرو۔

۳۔ دو قوتوں $ف_۱$ اور $ف_۲$ کا حاصل جہاں قوتیں علی القوائم عمل کر رہی ہیں ح ہے۔ اگر $ف_۱$ اور $ف_۲$ میں سے ہر ایک میں ۳ پونڈ کا اضافہ کیا جائے تو ح میں ۴ پونڈ کا اضافہ ہوتا ہے اور اب وہ $ف_۱$ اور $ف_۲$ کی ابتدائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ $ف_۱$ اور $ف_۲$ کو معلوم کرو۔

۴۔ ایک نقطہ و پر عمل کرنے والی قوتیں و ا، و ب، و ج ... و ن سے تعبیر کی گئی ہیں۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطو ا، ب، ج، ... ن کا مرکز ہندسی و ہے۔

۵۔ ا ب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے۔ اُن قوتوں کا حاصل معلوم کرو جو ا ب، ا ج، ا د، ا ع، ا ف سے تعبیر ہوتی ہیں۔

۶۔ ا ب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے۔ ثابت کرو کہ اُن قوتوں کا حاصل جو ا ب، ۲ ا ج، ۳ ا د، ۴ ا ع، ۵ ا ف سے تعبیر ہوتی ہیں $\sqrt{351}$ × ا ب سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس حاصل کی سمت معلوم کرو۔

۷۔ ا ب ج ایک مثلث ہے اور ب ج میں کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر ن ق، اُن قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرے جو ا ن، ن ب، ب ج سے تعبیر ہوتی ہیں تو ثابت کرو کہ ق کا طریق، ب ج کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔

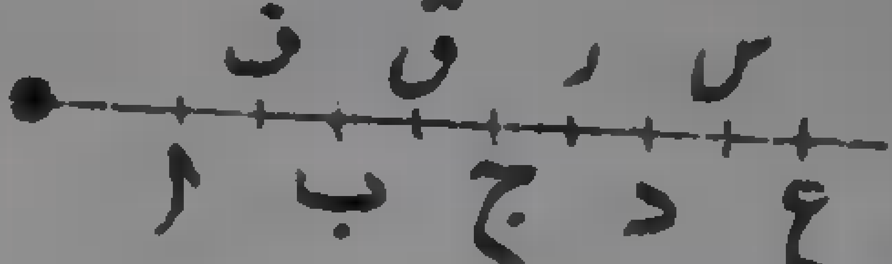
قوتوں کے نمونے

ذرہ کا وزن

۳۴ — کسی ذرہ کا وزن ہمیشہ انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے، کیونکہ زمین کی سطح پر کے کسی دئے ہوئے مقام پر یہ معلوم ہوا ہے کہ تمام ذروں کے وزن متوازی سمتوں میں عمل کرتے ہیں اور یہ سمت زیر بحث مقام پر انتصابی کہلاتی ہے۔ وزن وہ تجاذبی قوت ہے جس سے زمین ذرہ کو کھینچتی ہے بجز ایک چھوٹی تصحیح کے جو اِس واقعہ کی وجہ سے عائد کرنی ہوگی کہ وہ محور جو زمین میں ثابت ہیں بغیر اسراع کے حرکت نہیں کرتے۔ اِس تصحیح پر ہم یہاں بحث نہیں کریں گے۔ جب کسی جسم کے وزن کو و کہا جاتا ہے تو اس کا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اِس جسم کو زمین کی سطح کے لحاظ سے ساکن رکھنے کے لیے ایک قوت قَ کی ضرورت ہے جو انتصاباً اوپر وار عمل کرے۔

ڈوری کا تناؤ

۳۵ — کسی جسم پر قوت لگانے کا ایک آسان ذریعہ ڈوری یا رسی ہے اور اِس قوت کو ڈوری کا تناؤ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ ا ب ج د....، ڈوری ہے اور فرض کرو کہ اس کے سرے پر ایک ذرہ ف بندھا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے حصے ا ب، ب ج، ... اِس قدر چھوٹے ہیں کہ ہر ایک کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔



شکل (۱۸)

ڈوری کے کسی ذرہ مثلاً ب ج پر تین قوتیں عمل کریں گی،

(۱) اس کا وزن (۲) وہ قوت جو ڈوری کا ذرہ ج د، ذرہ ب ج پر لگاتا ہے اور (۳) وہ قوت جو ذرہ ا ب، ب ج پر لگاتا ہے۔

بالعموم کسی ڈوری کا وزن بمقابلہ دوسرے اوزان کے جو مسئلہ (۴۳)
میں شامل ہوتے ہیں بہت خفیف ہوتا ہے۔ اِس لیے سہولت اِس میں ہے کہ ڈوری کو ایسی سمجھیں کہ وہ وزن رکھتی ہی نہیں۔ اس صورت میں ذرہ ا ب پر صرف دو قوتیں عمل کرتی ہیں اور اس لیے توازن کے لیے یہ قوتیں مساوی اور مخالف ہونی چاہییں۔

۳۶۔ ملائمت۔ ڈوری کو ہم کامل طور پر ملائم اس وقت کہینگے جبکہ وہ قوت جو ایک ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر لگاتا ہے اِن دو ذروں کو ملانے والی سمت میں ہو۔ مثلاً اگر زیر بحث ذرہ کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ہو تو ذرہ ب ج پر عمل کرنے والی قوتیں سمتوں ف ق، ق ر میں ہونگی۔ ب ج کو توازن میں رکھنے کے لیے یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہونی چاہییں۔ فرض کرو کہ ہر ایک کی مقدار ت ہے۔ نیز یہ دو قوتیں مخالف سمتوں میں ہونی چاہییں، اس لیے ف ق ر کو ایک خط مستقیم ہونا چاہیئے۔

چونکہ تیسرے قانون کی رُو سے عمل اور تعامل مساوی اور مخالف ہوتے ہیں، اِس لیے وہ قوت بھی جو ب ج، ج د پر لگاتا ہے سمت ق ر میں ت ہونی چاہیئے۔ یہ پھر توازن کے لیے اُس قوت کے مساوی ہونی چاہیئے جو د ع، ج د پر لگاتا ہے۔ اِس لیے یہ قوت مقدار ت کی ہونی چاہیئے اور ق ر س ایک خط مستقیم ہونا چاہیئے۔

ہم اس استدلال کو جاری رکھ کر یہ معلوم کرتے ہیں کہ تمام ذرے ایک خط مستقیم ف ق ر س .... میں واقع ہونے چاہئیں اور یہ کہ ہر ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر ایک ہی قوت ت کے ساتھ ڈوری کی سمت میں عمل کرتا ہے ۔ قوت ت کو تناؤ کہتے ہیں۔ پس

ڈوری کے کسی نقطہ ف پر تناؤ وہ قوت ہے جس سے ڈوری کا وہ ذرہ جو ف کی ایک جانب ہے اُس ذرہ پر جو ف کی دوسری جانب ہے عمل کرتا ہے۔

کسی کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری کے ہر نقطہ پر کا تناؤ مقدار اور سمت میں وہی ہوتا ہے جبکہ ڈوری بیرونی قوتوں کے زیر عمل نہ ہو۔

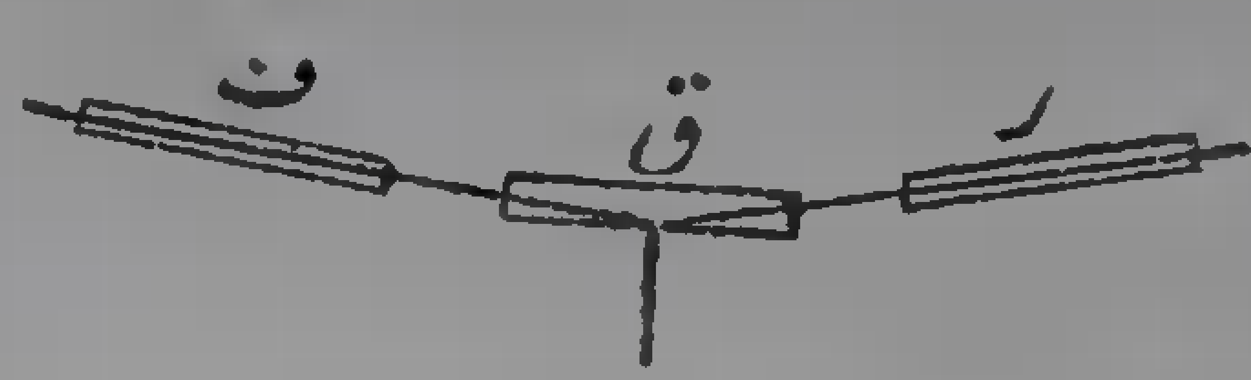
اِس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

ایک کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری جبکہ اُس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں ایک خط مستقیم میں ہونی چاہیئے جبکہ وہ توازن میں ہو۔

اگر تناؤ معدوم ہو تو خواہ طول ف ق، ق ر، ... کے عناصر کی سمتیں کچھ ہی ہوں توازن ہوگا۔ جب تناؤ معدوم ہوتا ہے تو ڈوری کو غیر تنی ہوئی کہتے ہیں ۔ ظاہر ہے کہ غیر تنی ہوئی ڈوری کسی شکل میں بہ حالت توازن ساکن رہ سکتی ہے ۔

آئندہ ثابت کیا جائیگا کہ جب ایک کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی (۴۴)
ڈوری ایک چکنی کھونٹی یا چرخی پر سے گذرتی ہے تو تناؤ کی مقدار ڈوری کے تمام نقطوں پر ایک ہی ہوتی ہے اور کھونٹی یا چرخی کے نقاط تماس پر اس کی سمت کھونٹی یا چرخی کے مماس کی سمت ہوتی ہے

۳۷ ۔ اگر ڈوری مطلقاً غیر وزنی نہ ہو بلکہ بہت ہلکی ہو تو اس کے کسی ذرہ پر مثلاً ق پر تین قوتیں عمل کریں گی ۔ اس کا وزن انتصاباً نیچے اور وہ دو قوتیں جن سے متصلہ ذرے سمتوں ف ق، ر ق میں عمل کرتے ہیں۔ لامی کے



شکل (۱۹)

مسئلہ سے ہر قوت اُس زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہیئے جو باقی دو قوتوں کے درمیان ہے۔ چونکہ وزن چھوٹا ہے اس لیے جب ف ق ر کو چھوٹا ہونا چاہیئے یعنے ف ق ر کو قریب قریب ایک خط مستقیم ہونا چاہیئے۔ تاہم یہ خط کاملاً سیدھا نہیں ہو سکتا الّا آنکہ ڈوری مطلقاً بے وزن ہو۔ اس لیے کسی حقیقی ڈوری میں اِس کے وزن کی وجہ سے کچھ نہ کچھ "جھوک" ہوگا، اگرچیکہ یہ جھوک اس قدر خفیف ہو سکتا ہے کہ اِس کی شناخت نہ ہو سکے۔

۳۸۔ امتداد پذیر اور نا امتداد پذیر ڈوریاں۔ تناؤ جیسا کہ معلوم ہو چکا ہوگا ایک قوت ہے جو ڈوری کے ہر نقطہ پر عمل کرتی ہے اور ڈوری کو اِس کے طول کی سمت میں وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے۔ ہو سکتا ہے کہ ڈوری وسیع کرنے کے اِس میلان کو قبول کرے یا نہ کرے۔ وہ ڈوری جو تناؤ کے تحت وسیع ہوتی ہے امتداد پذیر کہلاتی ہے اور وہ ڈوری جو بالکل وسیع نہیں ہوتی یا ہوتی بھی ہے تو اِس قدر کم کہ توسیع کی مقدار ناقابل قدر ہے نا امتداد پذیر کہلاتی ہے۔

اِس لئے کوئی نا امتداد ڈوری ایک ہی طول کی رہتی ہے خواہ کچھ ہی تناؤ اُس پر عمل کرے، برخلاف اس کے کسی امتداد پذیر ڈوری کا طول اِسکے تناؤ پر منحصر ہوتا ہے۔

سنہ ۱۶۶۰ء میں ہُک نے ایک قانون دریافت کیا تھا جس سے وہ ربط معلوم ہوتا ہے جو ایک ڈوری کے تناؤ اور اِس کی توسیع کی مقدار کے درمیان پایا جاتا ہے؛ تناؤ توسیع کی مقدار کے متناسب ہوتا ہے۔

تعریف۔ کسی ڈوری کا وہ طول جبکہ تناؤ صفر ہو ڈوری کا

"فطری طول" کہلاتا ہے۔

تعریف۔ ایک وسیع شدہ ڈوری کا طول جسقدر اس کے فطری طول سے تجاوز کرتا ہے اس کو ڈوری کی "توسیع" کہتے ہیں۔

ہک کا قانون۔ ڈوری کا تناؤ توسیع کے متناسب ہوتا ہے۔

اگرچہ ہک نے اس قانون کو ۱۶۶۰ء میں دریافت کر لیا تھا لیکن اُس نے اس کی اشاعت ۱۶۷۶ء تک نہیں کی اور اُس وقت بھی اس کو ایک حرفی معمہ (ceiiinosssttuv) کی شکل میں پیش کیا۔ (۴۵)

۱۶۷۸ء میں اُس نے سمجھایا کہ اس حرفی معمہ کے حروف لاطینی الفاظ "ut tenso sic vis" کے حروف ہیں — "کسی سپرنگ کی طاقت اور اس کے تناؤ میں ایک ہی تناسب رہتا ہے"۔ تناؤ (tenso) سے ہک کا مطلب وہ مقدار ہے جسے ہم نے "توسیع" کہا ہے اور طاقت (vis) سے وہ قوت مراد ہے جو سپرنگ کو وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے یعنی تناؤ۔

۳۹ — ہک کے قانون سے ہم صرف اُن توسیعات کا مقابلہ کر سکتے ہیں جو مختلف تناؤں سے پیدا ہوتی ہیں۔ کسی دئے ہوئے تناؤ سے پیدا شدہ حقیقی توسیع معلوم کرنے کے لیے ہمیں کسی دوسرے تناؤ سے پیدا شدہ توسیع معلوم کرنی چاہیے تاکہ مقابلہ ہو سکے۔

تعریف۔ وہ قوت جو ایک ڈوری کو اس کے فطری طول کا دوچند کرنے میں مطلوب ہوتی ہے ڈوری کی لچک کا مقیاس کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر ایک ڈوری کا طول ا ہو اور لچک کا مقیاس لہ تو ہم جانتے ہیں کہ تناؤ لہ، توسیع ا پیدا کرتا ہے اور اس لیے تناؤ ت، توسیع $\frac{\text{ت} \cdot \text{ا}}{\text{لہ}}$ پیدا کرے گا۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ڈوری ناامتدادپذیر ہے تو اِس سے یہ مطلب ہوتا ہے کہ لہ اِس قدر بڑا ہے کہ توسیع $\frac{ت ا}{لہ}$ نظر انداز کی جا سکتی ہے۔

ہُک کا قانون صرف خاص حدود کے اندر درست رہتا ہے۔ اگر ہم کسی ڈوری کے تناؤ کو غیر معین طور پر بڑھاتے جائیں تو ہم دیکھیں گے کہ ایک خاص حد گذر جانے کے بعد ہُک کا قانون درست نہیں رہتا اور اِس سے بھی زیادہ ایک خاص تناؤ پر پہنچتے ہی ڈوری دو ٹکڑوں میں ٹوٹ جاتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک وزن و، ایک ڈوری سے لٹک رہا ہے، اسے ایک جانب ایک افقی قوت سے کھینچا گیا ہے تاآنکہ ڈوری انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔ افقی قوت اور ڈوری کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک وزن کو جو ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہے ایک افقی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے جیسے اُسے سکون کے محل سے (جس میں ڈوری انتصابی ہوتی ہے) بعید تر کھینچا جاتا ہے ڈوری کا تناؤ مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔

۳۔ ۱۰۰ پونڈ کا ایک وزن دو ڈوریوں سے جو انتصابی کے ساتھ ۶۰° کے زاوئے بناتی ہیں لٹکایا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۴۔ ۳۰ پونڈ کا ایک وزن دو امتدادپذیر ڈوریوں سے بندھا ہے، ڈوریوں کا فطری طول ۲ فٹ ہے، لچک کا مقیاس ۱۰۰ پونڈ ہے اور ڈوریوں کے دوسرے سرے دو نقطوں سے بندھے ہیں جو ایک دوسرے سے ۴ فٹ کے افقی فاصلے پر ہیں۔ وہ محل معلوم کرو جس میں وزن توازن میں ساکن رہ سکتا ہے۔

۵۔ ایک وزن و، طول ل کے تین مساوی ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے، ڈوریوں کے دوسرے سرے تین نقطوں سے بندھے ہیں جو ضلع ا کے ایک

(۴۶) افقی متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

دو اجسام کے درمیان تعامل

۴۰ — ایک اور طریقہ جس سے قوت ایک ذرہ پر لگائی جا سکتی ہے، اُس دباؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے جو ذرہ اور ایک ٹھوس جسم کے درمیان ہوتا ہے۔ ایسی قوت کو بالعموم تعامل کہتے ہیں۔

مثلاً وہ جسم جو ایک کمرے کے فرش پر پڑا ہے اپنے وزن کے زیر عمل سے ہے جو نیچے وار عمل کرتا ہے لیکن وہ ایک دوسری قوت کے عمل کی وجہ سے جو فرش سے اوپر وار عمل کرتی ہے ساکن رہتا ہے، یہ قوت جسم اور فرش کے درمیان تعامل ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ جسم کو سکون کی حالت میں متوازن رکھنے کے لئے تعامل کو جسم کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے اور اُسے انتصاباً عمل کرنا چاہئے۔

رگڑ

۴۱ — فرض کرو کہ ایک چھوٹا جسم ایک ایسے مستوی پر پڑا ہے جس کا ڈھال تغیر پذیر ہو سکتا ہے مثلاً ڈیسک کے ڈھکن کی سطح مستوی۔ اگر اس مستوی کو افقاً پکڑا جائے تو جسم ساکن رہ سکتا ہے جیسا کہ قبل ازیں مذکور ہوا۔ اب مستوی کو بتدریج جھکاتے جاؤ تو معلوم ہوگا کہ جوں ہی جھکاؤ ایک خاص زاویہ پر پہنچتا ہے تو جسم مستوی پر نیچے وار پھسلنے لگتا ہے۔

وہ زاویہ جس پر جسم کے پھسلنے کی ابتدا ہوتی ہے اشیاء کے مختلف جوڑوں کے لیے مختلف معلوم ہوا ہے، مثلاً لکڑی لکڑی پر پھسلنے کے لیے یہ زاویہ ۱۰° سے ۲۵° تک متغیر ہو سکتا ہے، لوہا لکڑی پر پھسلنے کے لیے یہ زاویہ ۱۰° سے ۳۰° تک متغیر ہوتا ہے اور لوہا لوہے پر پھسلنے کے لیے وہ صرف ۱۰° یا ۱۵° ہے۔

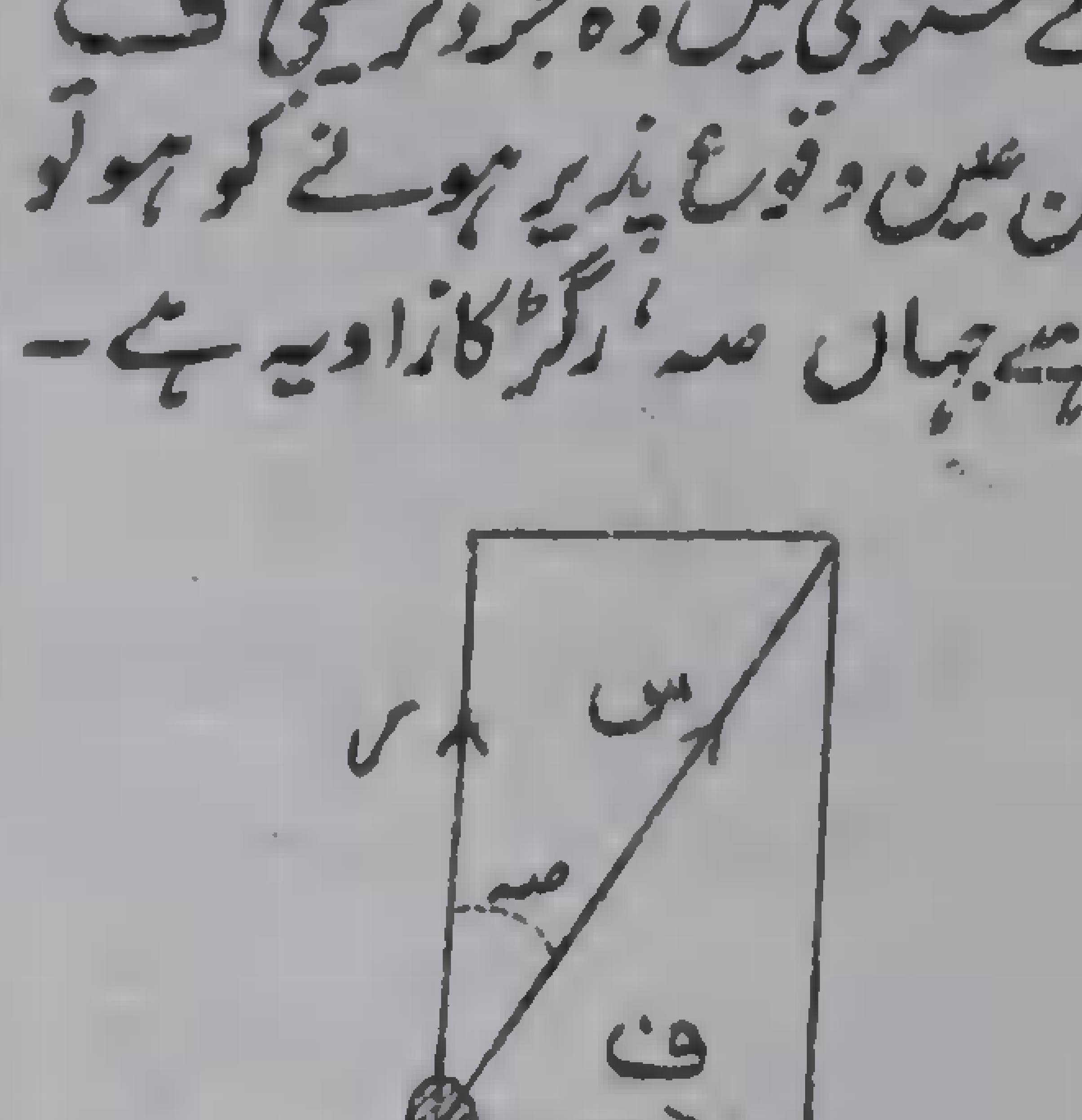
جب دو اشیاء ایسی ہوں کہ یہ زاویہ صفر ہو — یعنی ایسی کہ ایک

دوسری پر صرف اُسوقت ہی ساکن رہ سکتی ہے جبکہ تماس کی سطح کا ملاً افقی ہو توان کے درمیانی تماس کو **کامل طور پر چکنا** کہتے ہیں۔۔ کامل طور پر چکنے تماس کا قریب ترین تقرب جس کا تجربہ روزمرہ زندگی میں ہوتا ہے غالباً برف پر فولاد کا ہے مثالاً اسکیٹنگ میں۔

یہ معلوم ہوا ہے کہ وہ زاویہ جس تک ایک شئے سے بنی ہوئی مُستوی سطح کو جُھکانا پڑتا ہے تاآنکہ ایک دوسری شئے اِس پر پھسلنے لگے دوسری شئے کی مقدار اور رقبہ تماس دونوں کے غیر تابع ہوتا ہے۔ یہ زاویہ زیر تماس دو اشیاء کی صرف نوعیت پر منحصر ہوتا ہے۔

نیز جب دو جسم کسی طریقہ پر باہم دبائے جاتے ہیں تو یہ معلوم ہوا ہے کہ تعامل کی سمت سطح فاصل کے عماد کے ساتھ کوئی زاویہ (ایک خاص انتہائی زاویہ کی حد تک) پھسلن کے وقوع کے بغیر بنا سکتی ہے لیکن جوں ہی یہ خاص زاویہ پہنچ جاتا ہے تو پھسلن واقع ہوتی ہے۔ اِس زاویہ کو رگڑ کا زاویہ کہتے ہیں۔ صریحاً یہ وہی زاویہ ہے جس میں سے اُس مُستوی کو جس کا ذکر اوپر آچکا ہے جھکایا جا سکتا ہے قبل اسکے کہ پھسلن واقع ہو کیونکہ مُستوی کے عماد اور تعامل کی سمت کے درمیان جو زاویہ ہوتا ہے وہ صرف مُستوی کا ڈھال ہے۔

۲۴۔ کسی صورت میں جس میں رگڑ کی قوتیں عمل کریں فرض کرو کہ تعامل کا عمادی جزو ترکیبی ر ہے اور فرض کرو کہ تماس کے مُستوی میں وہ جزو ترکیبی ف ہے جو رگڑ سے پیدا ہوتا ہے۔ جب پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو تو حاصل کو عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہیے جہاں صہ، رگڑ کا زاویہ ہے۔



شکل (۲۰)

پس اگر پورا تعامل س سے تعبیر ہو تو

ر = س جم صہ، ف = س جب صہ

اور اس لیے ف = ر مس صہ

مقدار مس صہ کو رگڑ کی قدر کہتے ہیں اور اسے ایک واحد علامت مہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس لیے جب

پھسلن عین واقع ہونے کو ہو تو

ف = مہ ر

یہ صاف طور پر ذہن نشین ہونا چاہیے کہ اِس مساوات سے رگڑ کی قوت کی ٹھیک قیمت حاصل ہوتی ہے **صرف اس وقت جبکہ پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو**۔ اس سے رگڑ کی قوت کی قیمت کی اوپر کی حد متعین ہوتی ہے ۔ لیکن اِس قوت کی حقیقی قیمت معلوم نہیں ہوتی جب تک کہ ہمیں یہ نہ معلوم ہو کہ نظام پھسلنے کے عین موقع پر ہے ۔

۴۳ — مثلاً اُس تجربہ پر غور کرو جس کا ذکر اوپر کیا جا چکا ہے، اِس میں ایک ذرہ ایک افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور مستوی کو بتدریج جھکایا جاتا ہے ۔ جب مستوی افقی ہوتا ہے تو ذرہ ساکن رہتا ہے، اِس پر صرف جاذبہ ارض اور مستوی کا تعامل عمل کرتے ہیں ۔ اِس لیے تعامل افقی ہے اور اِس لیے ف = ۰ ۔ پھر اِس نظام پر غور کرو جبکہ مستوی افق کے ساتھ زاویہ عہ بنائے ۔ اگر پھسلن واقع نہیں ہوتی تو ذرہ، اپنے وزن و اور اُس تعامل کے زیر عمل توازن میں رہے جو ذرہ اور مستوی کے درمیان ہے ۔ اِس لیے تعامل میں ایک انتصابی قوت و شامل ہونی چاہیئے ۔ ہم اِس تعامل کو دو اجزائے ترکیبی و جم عہ اور و جب عہ میں جو مستوی پر عمود اور اس کے متوازی ہیں تحلیل کر سکتے ہیں ۔ قبل الذکر تعامل کا عمادی جزو ترکیبی ہے ۔ اور موخر الذکر رگڑ کا جزو ترکیبی ۔ اس لیے مستعملہ ترقیم میں

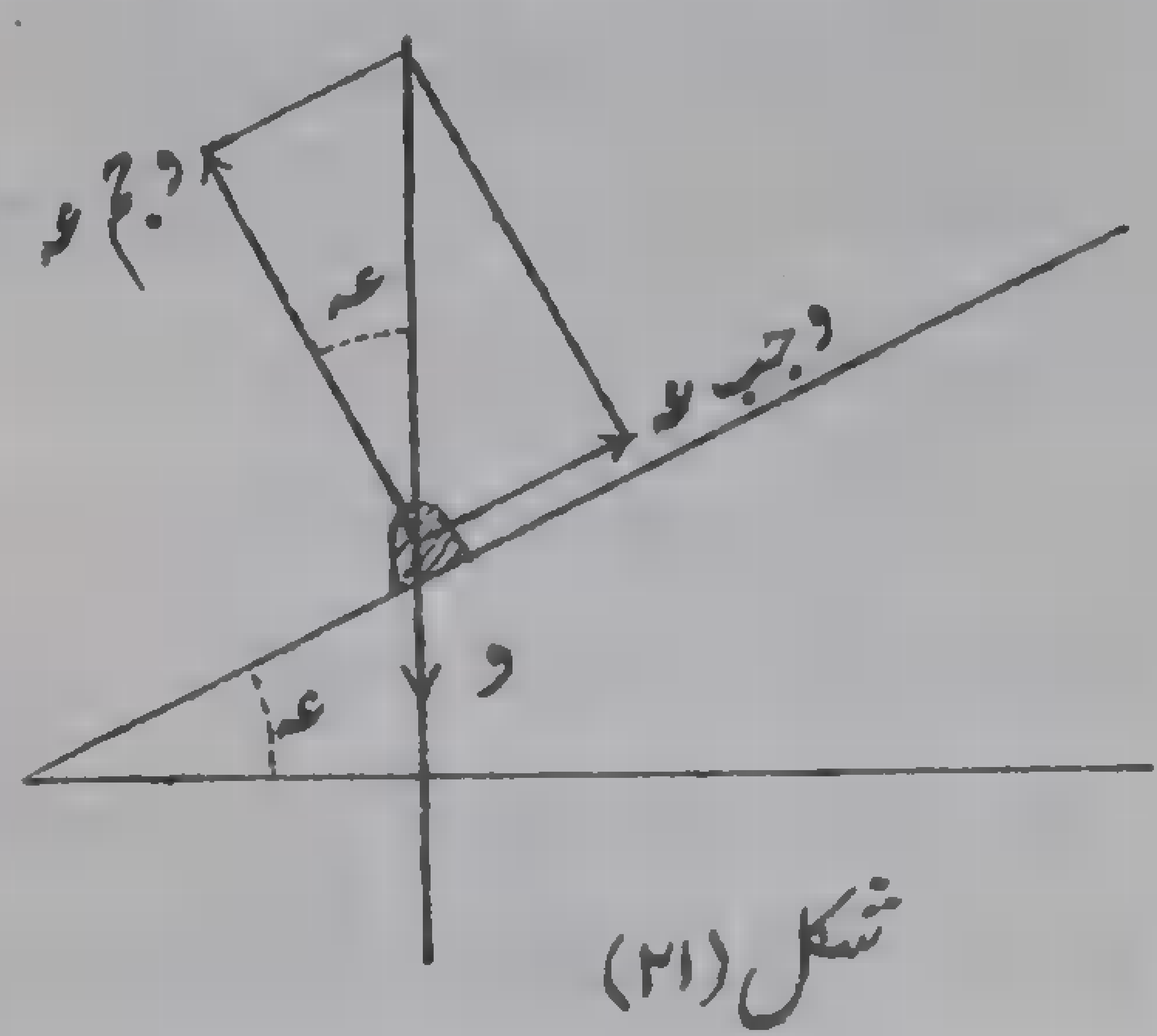
ر = و جم عہ

ف = و جب عہ

اس لیے اس صورت میں

ف = ر مس عہ

جیسے عہ بڑھتا ہے ف اور ف/ر دونوں بڑھتے ہیں یہانتک جب عہ ،



شکل (۲۱)

قیمت ص پر پہنچتا ہے تو ف/ر اپنی انتہائی قیمت م پر پہنچتا ہے اور اسکے بعد پھسلن واقع ہوتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ۱۰۰ پونڈ کی ایک کمیت ایک کھردرے مستوی پر رکھی ہوئی ہے، یہ کمیت عین حرکت کرنے کو ہوتی ہے جبکہ اس پر ایک قوت ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی افقی طور پر عمل کرتی ہے۔ رگڑ کا زاویہ معلوم کرو۔

۲۔ ایک جسم ایک مائل سطح مستوی پر جو افق کے ساتھ °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے رکھا ہوا ہے۔ یہ جسم سطح کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہوتا ہے جبکہ اس پر ایک افقی قوت اس کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہے۔ رگڑ کی قدر معلوم کرو۔

۳۔ ایک شخص جو ۲۰۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچنے کی قابلیت رکھتا ہے ایک افقی سڑک پر (رگڑ کی قدر $\frac{1}{3}$) ۷۰۰ پونڈ کی ایک کمیت گھسیٹنے کی کوشش کرتا ہے۔ اس کی مدد کے لیے حمالہ کی زنجیر کمیت کے ساتھ باندھ دی گئی ہے، زنجیر انتصاباً لٹک رہی ہے۔ زنجیر میں کتنا تناؤ ہونا چاہئے کہ شخص کمیت کو عین حرکت دیسکے۔

۴۔ ایک کیڑا، نصف قطر ا کے ایک نیم کروی پیالے کی اندرونی سطح اوپر وار رینگنے کی کوشش کرتا ہے۔ وہ کتنا اونچا چڑھ سکتا ہے اگر اس کے پاؤں اور پیالے کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{3}$ ہو۔

۵۔ ایک شخص برف پر پتھر کے ایک گنڈ کو دھکیلنے کی کوشش میں افقی طور پر قوت لگاتا ہے لیکن اسے معلوم ہوتا ہے کہ جوں ہی پتھر حرکت کرنے لگتا ہے اس کے پاؤں پھسلنے لگتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر وہ اوپر وار پتھر کو دھکیلے تو وہ بغیر کسی مشکل کے پتھر کو متحرک کرسکتا ہے لیکن اگر وہ نیچے وار زور لگائے تو وہ اس کو شاید ہٹا بھی نہ سکے۔

۶۔ ایک چکنی چرخی ایک افقی مستوی کے کنارے رکھی ہوئی ہے۔ اس پر سے

ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے ایک سرے پر وزن و آزادانہ لٹک رہا ہے اور
دوسرے سرے پر وزن و بندھا ہے جو مستوی پر ساکن ہے۔ اگر رگڑ کی قدر مہ (۴۹)
اس قدر بڑی ہو کہ حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی تو معلوم کرو کہ کس زاویہ میں سے مستوی
کو جھکانا چاہیے کہ حرکت عین واقع ہونے کو ہو۔

۷۔ کمیت ک کا ایک سیاح کمیت ک کے ایک رہنما سے رسی کے ذریعہ
بندھا ہوا ہے اور یہ دونوں ایک پہاڑ کے رُخ پر ہیں جسے ایک مقلوب نیم کرہ سمجھا
جا سکتا ہے۔ رسی کا طول پہاڑ کے مرکز پر زاویہ عہ بناتا ہے اور رسی پہاڑ کے
کسی نقطہ کو مس نہیں کرتی۔ اگر ان میں سے کسی شخص اور پہاڑ کے درمیان رگڑ کی
قدر مہ ہو تو معلوم کرو کہ پہاڑ کے رُخ پر نیچے کی جانب سیاح کتنی دور تک جانے کی
جرات کر سکتا ہے قبل اس کے کہ وہ اور رہنما دونوں پہاڑ کے دامن میں گر جائیں۔

توضیحی امثلہ

۱۔ ایک وزنی ذرہ ج ایک چکنے مائل مستوی پر دو ڈوریوں کے ذریعہ جنکے
طول ل، ل ہیں اور جو مستوی کے نقطوں ا، ب کے ساتھ بندھی ہوئی ہیں ساکن
ہے۔ یہ نقطے ا، ب ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ
ف ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ اور وہ تعامل معلوم کرو جو مستوی اور ذرہ کے درمیان ہے۔

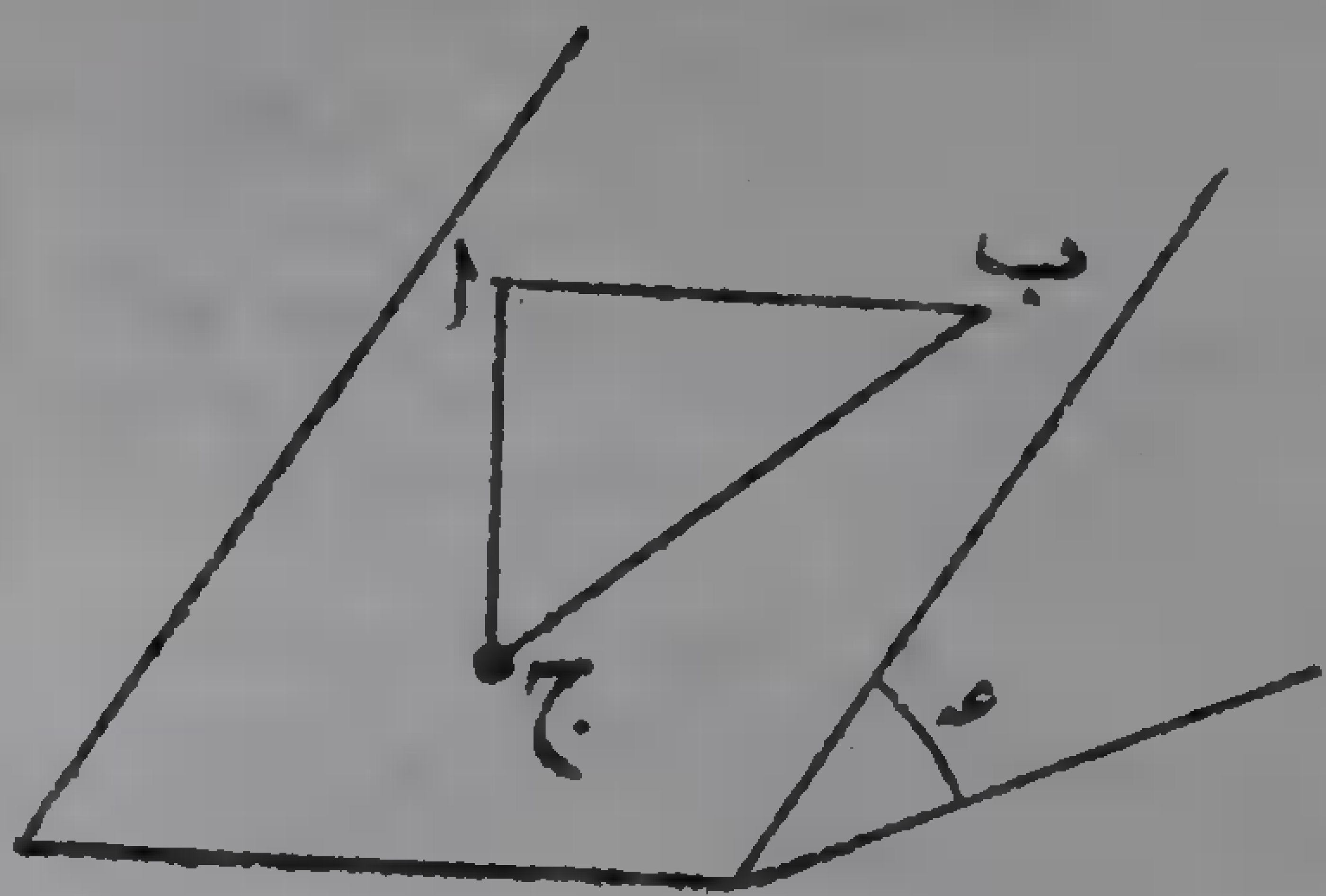
فرض کرو کہ ذرہ کا وزن و ہے اور مستوی کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔
ذرہ حسب ذیل قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے:

(ا) اس کا وزن و جو انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے،

(ب) ذرہ اور مستوی کے درمیان تعامل۔ چونکہ مستوی چکنا ہے، یہ تعامل
مستوی کے عمود وار عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اس تعامل کی مقدار ر ہے۔

(ج) وہ دو تناؤ جن کی مقداریں مطلوب ہیں۔ فرض کرو کہ ان کی مقداریں
$ت_1$، $ت_2$ سے تعبیر ہوتی ہیں۔

چونکہ یہ چار قوتیں توازن پیدا
کرتی ہیں اس لیے کسی سمت میں ان کے
اجزائے تحلیلی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے
ڈوریوں کے تناؤ مُستوی کے عمود وار
کوئی اجزائے تحلیلی نہیں رکھتے، اس لیے
قوتوں کو مُستوی کے عمود وار تحلیل کرنے
سے ہمیں ایک ایسی مساوات ملے گی
جس میں صرف دو قوتیں شامل ہونگی۔



شکل (۲۲)

وزن کا جزو تحلیلی مُستوی کے عمود وار و جم عہ ہے۔ تعامل پورے کا پورا مستوی کے عمود وار ہے۔ اس لیے وہ مساوات جس کی ہمیں تلاش ہے

ہ − و جم عہ = ۰

ہے۔ اس سے فوراً تعامل کی مقدار معلوم ہوتی ہے۔

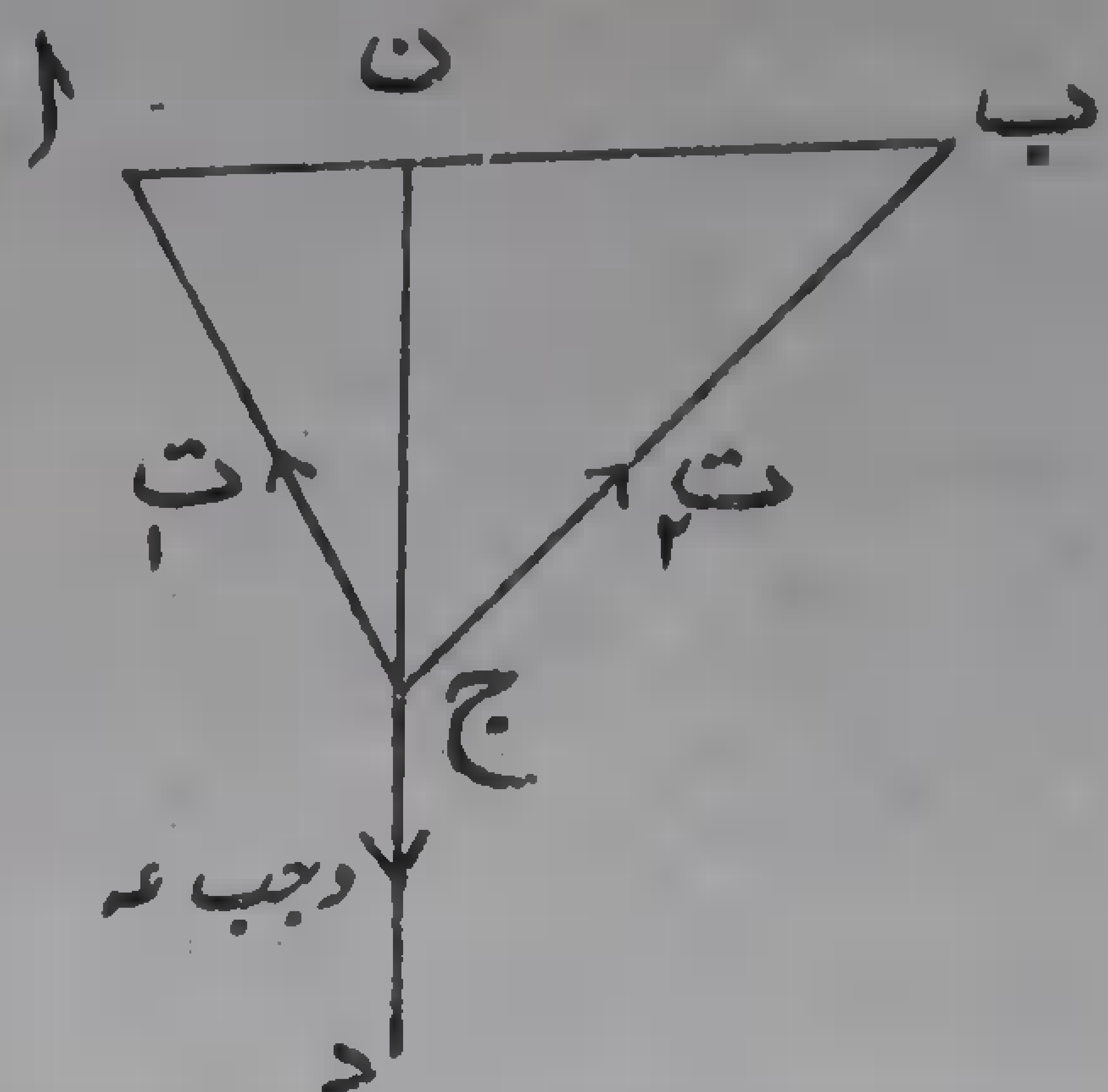
اب ہم مائل مُستوی میں قوتوں کے اجزائے تحلیلی پر غور کریں گے۔ وہ قوتیں جن کے اجزائے ترکیبی اس مُستوی میں ہیں صرف حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن جس کا جزو ترکیبی و جیب عہ ہے اور خط میلان اعظم میں نیچے کی جانب عمل کرتا ہے۔

(ب) ڈوریوں کے تناؤ جو کاملاً مُستوی میں ہیں اور جو ڈوریوں ج ا، ج ب کی سمت میں عمل کرتے ہیں۔

یہ تین قوتیں و جیب عہ، ت۱ اور ت۲ توازن میں ہونی چاہئیں، (۵۰)
اس لیے لامی کے مسئلہ کی رو سے ہر ایک، دوسری دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے۔

شکل (۲۳) میں ان تین قوتوں کے خطوط عمل ج د، ج ا، ج ب ہیں۔ خط ج د، ج میں سے گزرنے والا خط میلان اعظم ہونے کی وجہ سے خط اب کے علی القوائم ہے جو افقی ہے۔ پس اگر د ج کو بڑھایا جائے اور وہ اب سے ن پر ملے تو زاویہ ان ج قائمہ ہے۔ اس لیے



شکل (۲۳)

جب ا ج د = جب ا ج ن = جم ج ا ن

اور اسی طرح

جب ب ج د = جب ب ج ن = جم ج ب ا ن

∴ لامی کے مسئلہ سے

$$\frac{\text{و جب عہ}}{\text{جب ا ج ب}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{جب ب ج د}} = \frac{\text{ت}_2}{\text{جب ا ج د}}$$

اُن رشتوں سے جو اوپر حاصل ہوئے ہیں اِن نسبتوں کو مثلث ا ب ج کے زاویوں کی رقوم میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{و جب عہ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{جم ب}} = \frac{\text{ت}_2}{\text{جم ا}}$$

اب اگر ہم ضرورت سمجھیں تو جم ا، جم ب اور جب ج کو مثلث کے ضلعوں ل۱، ل۲ اور ف کی رقوم میں علم مثلث کے معمولی ضابطوں کی مدد سے بیان کر سکتے ہیں۔

طالب علم بطور خود اُس شکل کا امتحان کرے جو نتیجۂ بالا حسب ذیل دو خاص صورتوں میں اختیار کرتا ہے:

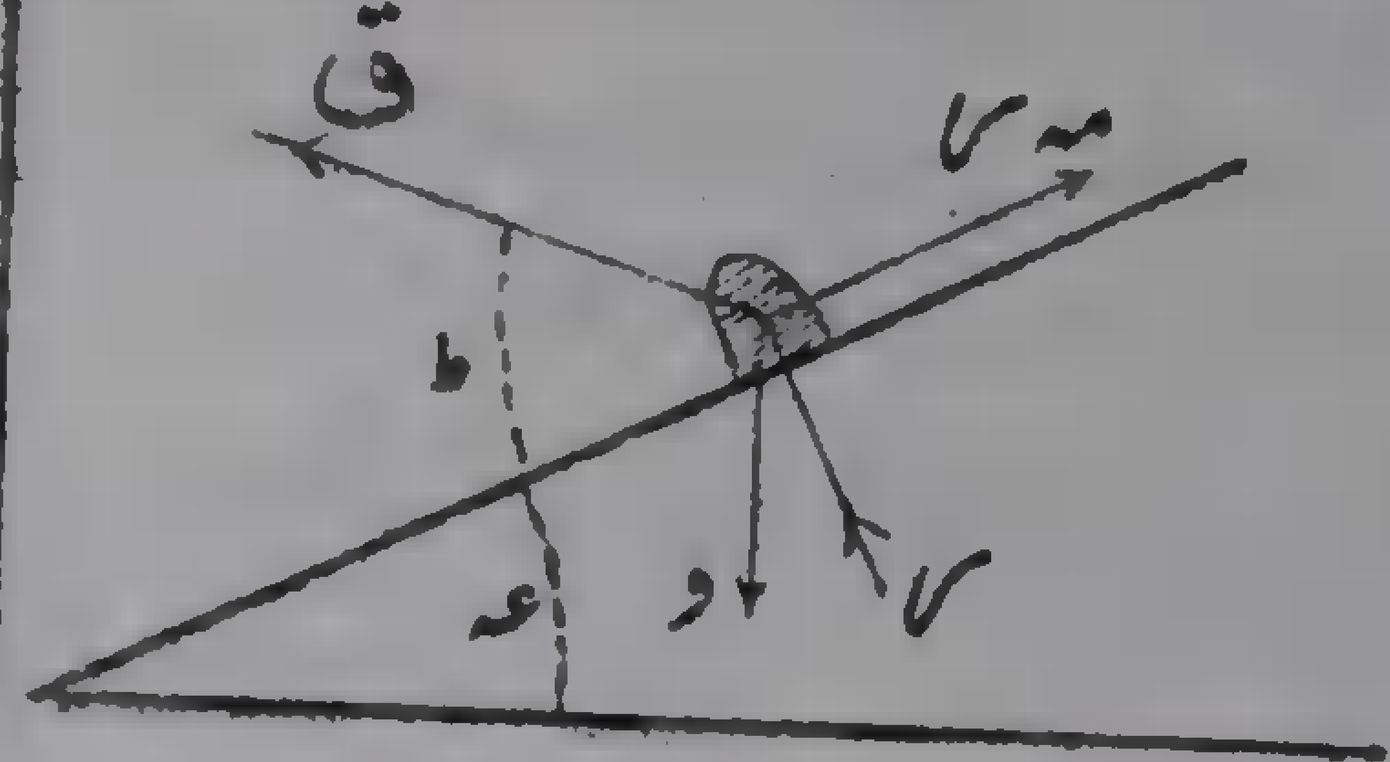
(ا) ا = ب = ۰، جس میں ا ج ب ایک خط مستقیم میں ہیں۔

(ب) ج = ۰، ا = ب = $\frac{\pi}{2}$، جس میں ڈوریاں متوازی ہیں۔

۲۔ اُس چھوٹی سے چھوٹی قوت کی مقدار اور سمت معلوم کرو جو ایک جسم کو جو ایک مائل مستوی پر ساکن ہے مستوی کے نیچے حرکت میں لائے۔

فرض کرو کہ مستوی کا زاویہ عہ ہے اور مستوی اور اُس جسم کے درمیان جسے متحرک کرنا ہے رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ جسم کا وزن و ہے اور فرض کرو کہ

ایک قوت ق مُستوی کے نیچے ایک ایسی سمت میں اِس پر لگائی گئی ہے جو خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے، اِس قوت کے متعلق فرض کرلیا گیا ہے کہ وہ جسم کو متحرک کرنے کے لیے عین کافی ہے۔



شکل (۲۴)

جسم پر عمل کرنیوالی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اُس کا وزن و،

(ب) قوت عاملہ ق،

(ج) مستوی کے ساتھ تعامل۔

فرض کرو کہ اِس آخری قوت کو مستوی اور اِس کے عمود وار دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا گیا ہے۔ اگر بعد الذکر کو ر فرض کریں تو قبل الذکر جزو ترکیبی مہ ر ہوگا جو مستوی کی اوپر کی جانب عمل کرے گا کیونکہ بموجب فرض جسم مُستوی کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہے۔

(۵۱) اِن تمام قوتوں کا حاصل معدوم ہوتا ہے، اِس لیے کسی سمت میں اِن کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ قوتوں کو مُستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے

$$ر + ق \ جب \ طہ - و \ جم \ عہ = ۰$$

اور مُستوی میں تحلیل کرنے سے

$$ق \ جم \ طہ + و \ جب \ عہ - مہ \ ر = ۰$$

نامعلوم تعامل ر کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ق \ (مہ \ جب \ طہ + جم \ طہ) - و \ (مہ \ جم \ عہ - جب \ عہ) = ۰$$

اس لیے $$ق = \frac{و \ (مہ \ جم \ عہ - جب \ عہ)}{مہ \ جب \ طہ + جم \ طہ}$$

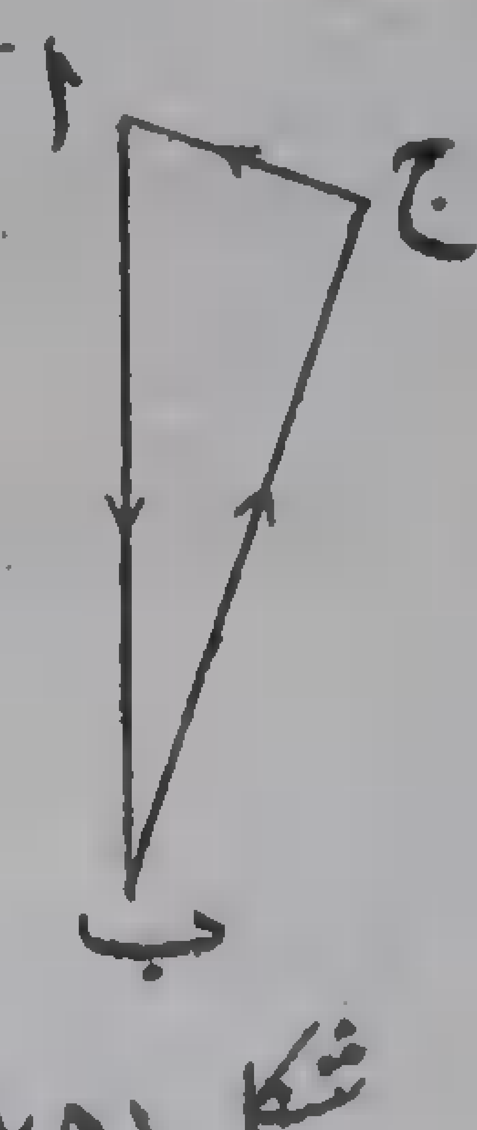
اس لیے مہ کی بجائے مس صہ رکھنے سے

$$ق = \frac{و \ (جم \ عہ \ مس \ صہ - جب \ عہ)}{جم \ طہ + مس \ صہ \ جب \ طہ} = \frac{و \ جب \ (صہ - عہ)}{جم \ (طہ - صہ)}$$

ق کی قیمت اقل ہوگی جبکہ جم (طہ - صہ) اعظم ہو اور یہ اُس وقت ہوگا جبکہ جم (طہ - صہ) = ۱ یعنی جبکہ طہ = صہ - اِس صورت میں ق کی قیمت ہے

ق = و جب (صہ - عہ)

پس یہ وہ چھوٹی سے چھوٹی قوت ہے جس سے حرکت پیدا کیجا سکتی ہے اور اسے عمل کرنا چاہئے اِس طور پر کہ وہ سُتوی کے ساتھ ایک ایسا زاویہ طہ بنائے جو زاویہ رگڑ صہ کے مساوی ہو۔ چونکہ بموجب فرض وزن بغیر پھسلے ساکن رہتا ہے جبکہ کوئی قوت لگائی نہیں جاتی اِس لیے زاویہ صہ کو عہ سے بڑا ہونا چاہئے۔ اِس لیے قوت ق کی سمت ہمیشہ اوپر وار سمت میں مائل ہونی چاہئے۔ قوت ق کا عمل دوگونہ ہے، وہ جسم کے وزن کا کچھ حصہ سہارتی ہے (اپنے اُس جزو ترکیبی کے ذریعہ جو سُتوی پر عمود ہے) اور اِس لیے رگڑ کی مقدار کو گھٹاتی ہے، نیز وہ رگڑ کی مزاحمت پر غالب آنے کے لیے محرک طاقت (اپنے اُس جزو ترکیبی کے ذریعہ جو سُتوی میں ہے) بھی ہمیا کرتی ہے۔ جب اِس قوت کے یہ دو حصے مفید ترین طریقہ پر لگے ہوئے ہوں تو ق کی قیمت اقل ہوتی ہے اور یہ جیسا کہ ہم ثابت کر چکے ہیں اُس وقت ہوتا ہے جبکہ طہ = صہ



شکل (۲۵)

اِس مسئلہ کا ایک دلچسپ اور سبق آموز حل ہندسی طور پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ توازن کے لیے متذکرۂ بالا تین قوتوں کو قوتوں کا ایک مثلث بنانے کی شرط کو پورا کرنا چاہئے۔

فرض کرو کہ ا ب، وزن کو تعبیر کرتا ہے اور ب ج، کمیت اور سُتوی کے درمیان تعامل کو۔ اس لیے ج ا، قوت عاملہ ق کو تعبیر کرنا چاہئے۔ اگر جسم حرکت کے نقطہ پر ہے تو تعامل کو سُتوی کے عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہئے، اِس لیے زاویہ ا ب ج، صہ - عہ ہونا چاہئے۔ اس لیے خط ب ج سمت میں ثابت ہے۔

اور مسئلہ یہ ہے کہ ا ج کی مقدار اور سمت معلوم کی جائے جبکہ طول ا ج اقل ہو۔ صریحاً اس کی اقل قیمت واقع ہوتی ہے جبکہ ا ج، ب ج پر عمود ہوتا ہے، اس لئے ا ج ایسی سمت میں ہونا چاہئے جو افق کے ساتھ زاویہ صہ - عہ بنائے جیسا کہ قبل ازیں معلوم کیا جا چکا ہے، نیز چونکہ ا ج = اب جب اب ج = اب جب (صہ - عہ)، اس لیے مطلوبہ قوت کی مقدار و جب (صہ - عہ) ہوگی۔

(۵۲) ۳۔ ایک ذرہ ایک لچکدار ڈوری سے بندھا ہے اور ڈوری کا دوسرا سرا ایک کھردرے مائل مستوی میں ایک نقطے پر ثابت ہے۔ مستوی کا وہ حصہ معلوم کرو جس کے اندر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔

ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اس کا وزن و انتصاباً نیچے،

(ب) ڈوری کا تناؤ،

(ج) کھردرے مستوی کے ساتھ تعامل۔

فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل ہے اور لچک کا مقیاس لہ تو جب ڈوری کا واقعی طول ر ہوتا ہے جہاں ر > ل تو تناؤ $\frac{(ر - ل) لہ}{ل}$ ہے۔

فرض کرو کہ مستوی کا میلان عہ ہے اور مستوی اور ذرہ کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ مستوی کے تعامل کو عادی جزوی ترکیبی کا اور مستوی میں کے جزو ترکیبی ف میں تحلیل کیا گیا ہے۔ وہ شرط کہ ذرہ ساکن رہے یہ ہے کہ ف < مہ کا۔ قوتوں کو مستوی کے علی القوائم تحلیل کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اس سمت میں



شکل (۲۶)

عمل کرنے والی قوتیں صرف ذرہ کا وزن اور مستوی کے ساتھ اس کا تعامل ہیں۔ اِس لیے

ک - و جم عہ = ۰

اب ذرہ کے توازن پر غور کرو جبکہ وہ کسی نقطہ ن پر ہو جس کا فاصلہ و سے ر (> ل) ہے۔ اِس پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی مائل مستوی میں حسب ذیل ہیں:

(ا) و جب عہ، ن میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم کی سمت میں نیچے کی جانب،

(ب) تناؤ $\frac{(ر - ل) لہ}{ل}$، سمت ن و میں،

(ج) تعامل کا وہ جزو ترکیبی جس کو ہم نے ف سے تعبیر کیا ہے۔
فرض کرو کہ و ن، مستوی کے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔
چونکہ پہلی دو قوتوں کا حاصل مقدار ف کا ہونا چاہئے اسلیے

$$ف^2 = و^2 جب^2 عہ + \frac{(ر - ل)^2 لہ^2}{ل^2} + \frac{2 (ر - ل) لہ}{ل} و جب عہ جم طہ$$

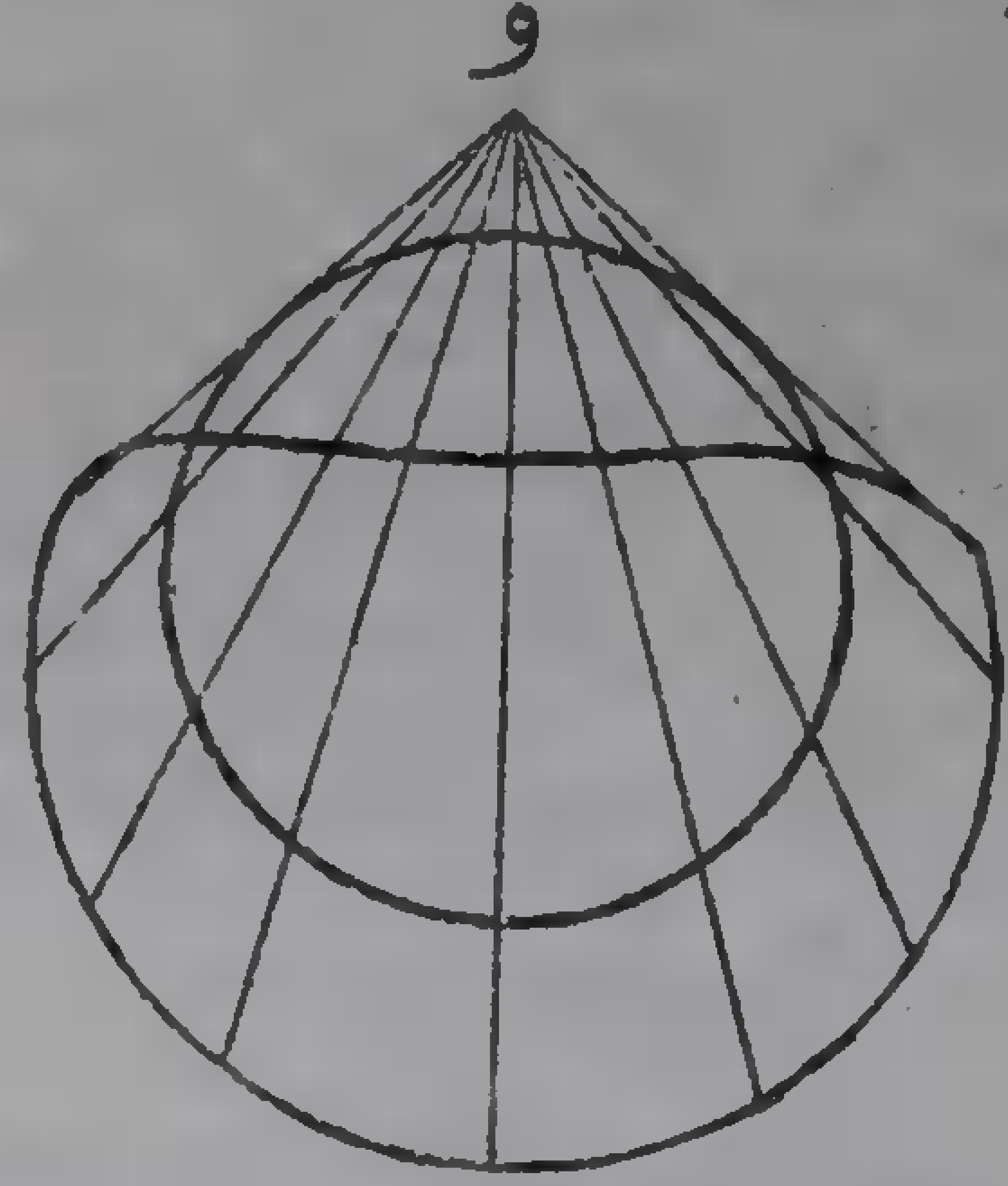
جس سے ف کی قوت کی وہ مقدار معلوم ہوگی جو توازن قائم رکھنے کے لیے ضروری ہے۔ اگر ذرہ حرکت کرنے کو ہو تو ف = مہ ک = مہ و جم عہ اور اس لیے

$$و^2 (جب^2 عہ - مہ^2 جم^2 عہ) + \frac{(ر - ل)^2 لہ^2}{ل^2} + \frac{2 (ر - ل) لہ}{ل} و جب عہ جم طہ = 0 \quad ......(ا)$$

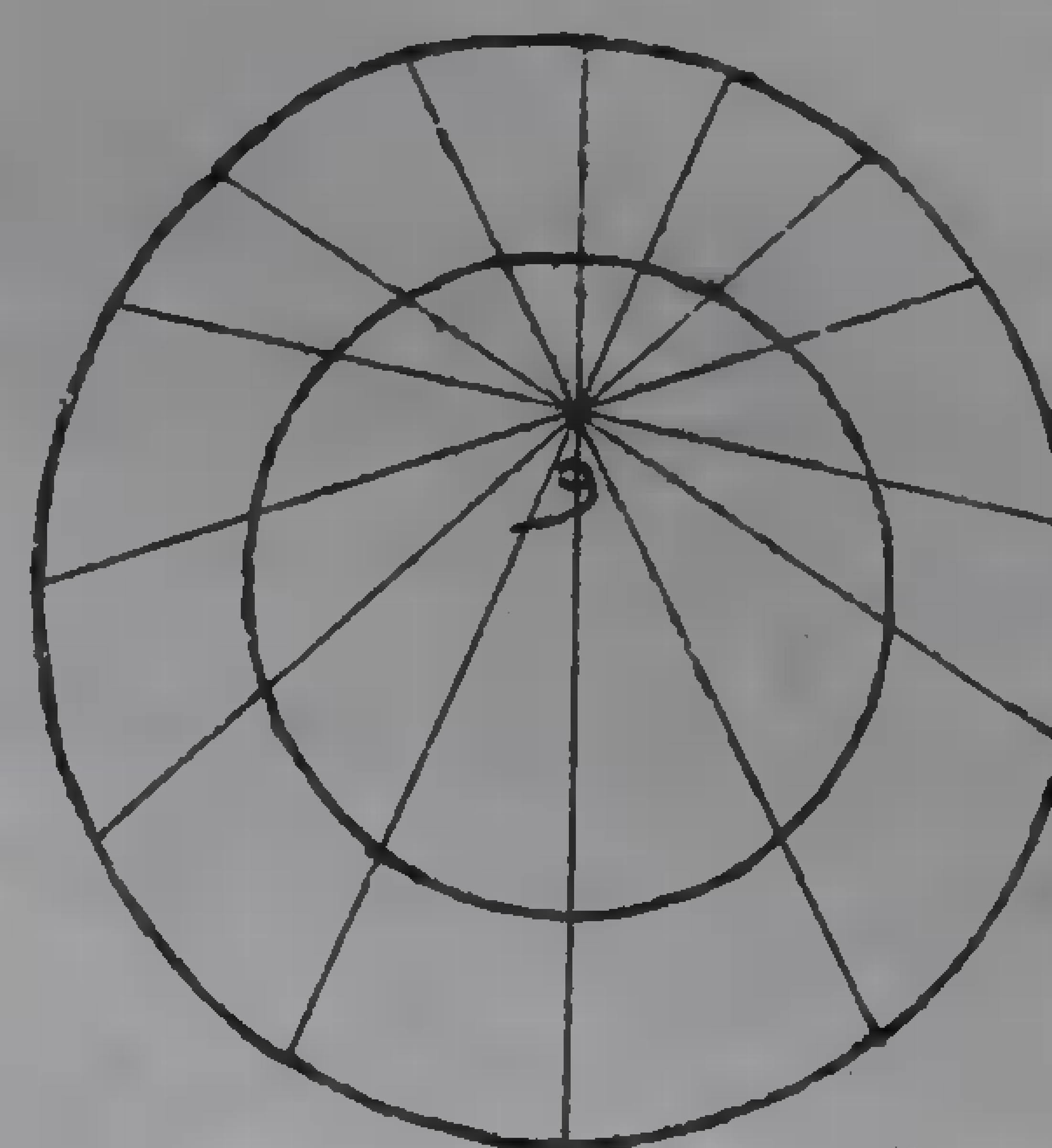
چونکہ نقطہ ن کے قطبی محدد ر، طہ ہیں اس لیے مساوات (ا) مستوی کے اُس حصہ کے حدود کی قطبی مساوات ہے جس کے اندر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔
اِس مساوات کی توجیہ آسان ترین طریقہ پر ہوگی اگر ہم یہ دیکھیں کہ ر - ل کی بجائے ر رکھنے سے مساوات (ا) ہو جاتی ہے (۵۳)

$$و^2 (جب^2 عہ - مہ^2 جم^2 عہ) + \frac{لہ^2}{ل^2} ر^2 + 2 \frac{لہ}{ل} و جب عہ \times ر جم طہ = 0 \quad ......(ب)$$

جو ایک دائرہ کی قطبی مساوات ہے ۔ پس ابتدائی طریق جو مساوات (ا) سے تعبیر ہوتا ہے اِس طور پر کھینچا جاسکتا ہے کہ اول وہ دائرہ کھینچ لیا جائے جو مساوات (ب) سے تعبیر ہوتا ہے اور پھر مبداء میں سے گذرنے والے ہر سمتی نیم قطر کو اس دائرہ کے محیط کے آگے فاصلہ ل تک بڑھایا جائے ۔



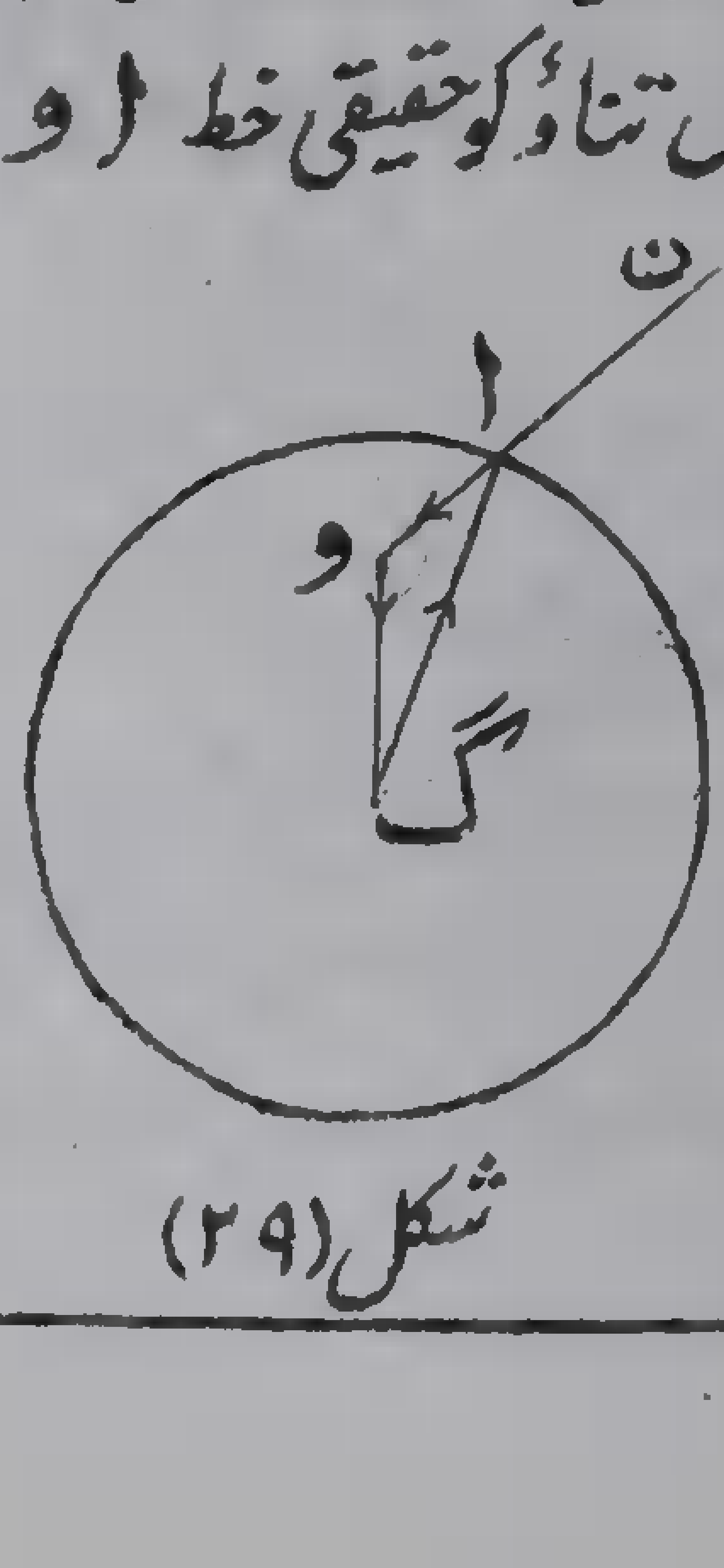
شکل (۲۸)



شکل (۲۷)

یہی نتیجہ ہندسی طور پر مسئلہ کو حل کرنے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے ۔ ذرہ جس مستوی پر ساکن ہے اِس میں صرف تین قوتیں اُس پر عمل کرتی ہیں اسلئے اِن قوتوں کے متوازی اور متناسب خطوں کو ایک مثلث بنانا چاہئے ۔

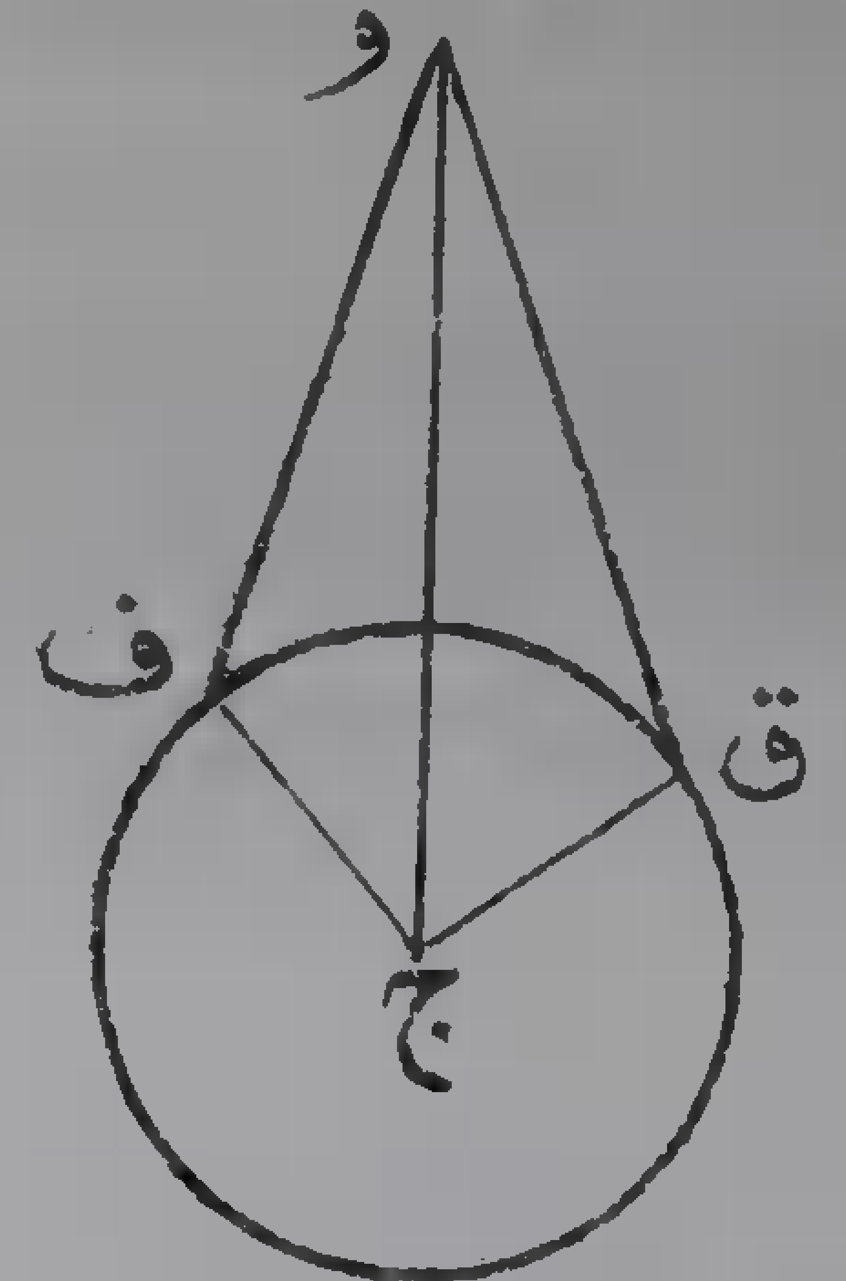
شکل (۲۹) میں فرض کرو کہ و ن ڈوری ہے اور فرض کرو کہ ن سے خط ن ا ، طول ل کا پیمایش کیا گیا ہے اور اس لیے ا و ، ڈوری کی توسیع ر ۔ ل ہے ۔ تناؤ ہمیشہ ا و کے متناسب ہوگا اور ا و کی سمت میں عمل کرے گا۔ فرض کرو کہ ہم یہ طے کرلیتے ہیں کہ قوتوں کے مثلث میں تناؤ کو حقیقی خط ا و سے تعبیر کرلیا گیا ہے ۔ اسی پیمانہ پر فرض کرو کہ وزن کا جزو ترکیبی و جب عہ خط و گ سے تعبیر ہوتا ہے جس کی سمت بلا شبہ نیچے دار و میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم کی سمت ہے ۔ پس ا و گ کو قوتوں کا مثلث ہونا چاہئے اور اسلئے گ ا سے



شکل (۲۹)

وہ فرکی تعامل تعبیر ہونا چاہیئے جو ذرہ اور مستوی کے درمیان ہے۔ اِس کی بڑی سے
بڑی ممکن قیمت مہ و جم عہ ہے اور اس لیے اگر پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو
ہو تو گ ا' قوت مہ و جم عہ کو تعبیر کرے گا۔ پس ن کے ایک محل کے
متناظر جس میں پھسلن عین واقع ہونے کو ہو ا کا محل ایسا ہے کہ گ ا' مستقل
قوت مہ و جم عہ کو تعبیر کرتا ہے یعنی دوسرے الفاظ میں ا کا طریق ایک دائرہ ہے
جس کا مرکز گ ہے۔ اِس سے وہ عمل ملتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔
مستوی کا وہ حصہ جس میں توازن ممکن ہے دو مختلف شکلیں اختیار کرتا ہے بموجب (۵۴)
اِس کے کہ مائل مستوی کا زاویہ عہ 'رگڑ' کے زاویہ صہ سے چھوٹا یا بڑا ہو۔ پہلی صورت
میں توازن کا قطعہ اُس قسم کا ہے جس کو شکل (۲۷) میں بتلایا جا چکا ہے۔ قیمت عہ = صہ
میں سے گذرنے پر وہ دائرہ جو عمل میں استعمال کیا گیا ہے نقطہ و میں سے گذرتا
ہے اور صہ سے بڑی عہ کی قیمتوں کے لیے توازن کا قطعہ اُس قسم کا رقبہ ہو جاتا
ہے جس کو شکل (۲۸) میں کھینچا گیا ہے۔ کیونکہ عہ کی اُن قیمتوں کے لیے جو صہ
سے بڑی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر) نصف قطر ل کا دائرہ جس کا
مرکز و ہے فائمیت کے قطعہ سے بالکل باہر واقع ہوتا ہے' اس کے برخلاف عہ
کی اُن قیمتوں کے لیئے جو صہ سے چھوٹی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر)
یہ دائرہ توازن کے قطعہ میں کُلاً واقع ہوتا ہے۔ صریحاً یہ دائرہ اُس
قطعہ کو نشان زد کرتا ہے جس کے اندر وزن ڈوری کے ساتھ ساکن
رہ سکتا ہے لیکن وہ توازن کا قطعہ ہوگا اگر عہ < صہ اور توازن کا قطعہ نہیں
ہوگا اگر عہ > صہ۔
اِس طرح یہ دائرہ اُس طریقہ پر توازن کے قطعہ کے اندر یا باہر واقع ہوگا
جس کا علم علم تحلیل سے حاصل کر لیا گیا ہو۔ اِس کے ساتھ ہی
بغیر جداگانہ تحقیق کے ہمیں اِس کا یقین نہیں ہو سکتا تھا کہ وہ نتیجہ جو علم تحلیل سے
حاصل ہوا ہے اُس قطعہ کے متعلق صحیح ہے جو و سے فاصلہ ل کے اندر واقع
ہے۔ کیونکہ تحلیل تو یہ فرض کر کے شروع ہوئی تھی کہ ڈوری تنی ہوئی ہے اور اِس لیئے
اِس کا اطلاق صرف اُس قطعہ پر ہو سکتا ہے جو و سے ل سے بڑے فاصلہ پر واقع ہے۔

۴۔ دو وزن و، وَ ایک چکنے کرہ پر ایک ڈوری کے ذریعہ جو ء پر کے ایک چھوٹے حلقہ میں سے گذرتی ہے سہارے گئے ہیں جہاں ء کرہ کے مرکز کے انتصاباً اوپر واقع ہے۔ توازن کی تشکیل معلوم کرو۔



شکل (۳۰)

فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں اِن دو اوزان کے محل ف، ق شکل (۳۰) ہیں۔ ف پر کے وزن و پر حسب ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں:

(ا) اس کا وزن و انتصاباً نیچے وار،

(ب) ڈوری کا تناؤ سمت ف ء میں۔

(ج) وہ تعامل جو کرہ اور وزن کے درمیان ہے چونکہ کرہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اسلیے اِس تعامل کی سمت، ذرہ اور کرہ کے تماس کے مستوی کے علی القوائم ہے یعنی اِس کی سمت ج ف ہے۔

یہ تین قوتیں جو ذرہ ف پر عمل کرتی ہیں مثلث ء ف ج کے تین ضلعوں کے متوازی ہیں۔ اِس لیے مثلث ء ف ج کو اِن تین قوتوں کا مثلث تصور کیا جا سکتا ہے، اِن قوتوں کی مقداریں اِس مثلث کے اضلاع کے متناسب ہونی چاہئیں۔ تناؤ اور تعامل کو ت اور ر سے تعبیر کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{و}{ء ج} = \frac{ت}{ء ف} = \frac{ر}{ج ف} \text{، ....(ا)}$$

اسی طرح مثلث ء ج ق کو ذرہ ق کے لیے قوتوں کا مثلث سمجھا جا سکتا ہے۔ (مخفی مباد کہ یہ مثلث اُسی پیمانہ پر قوتوں کو تعبیر نہیں کرتا جس پیمانہ پر مثلث ء ف ج تعبیر کرتا تھا کیونکہ اُس صورت میں ء ف سے وزن و کو تعبیر کیا گیا تھا اور اب ء ق سے وزن وَ تعبیر ہوتا ہے)۔

قوتوں کے اس دوسرے مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{وَ}{و ج} = \frac{تَ}{و ق} = \frac{رَ}{ج ق} ، \quad .... (ب)$$

جہاں تَ اور رَ سے وہ تناؤ اور تعامل تعبیر ہوتے ہیں جو ق پر عمل کرتے ہیں۔

چونکہ و پر کے حلقہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اِس لیے ڈوری ف و ق کا تناؤ ہر نقطہ پر وہی ہے۔ اِس لیے تَ = ت۔ پس مساواتوں (ا) اور (ب) سے

$$و \times و ف = وَ \times و ق ، \quad .... (ج)$$

کیونکہ ہر حاصل ضرب، ت × و ج کے مساوی ہے۔ اگر ڈوری کا پورا طول ل ہو تو

$$\frac{و}{و ق} = \frac{وَ}{و ف} = \frac{و + وَ}{ل} \quad (د)$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری خود کو اِس طور پر ترتیب دے لیتی ہے کہ وہ نقطہ و پر اِن دو وزنوں کی نسبت معکوس میں تقسیم ہوتی ہے۔ نیز ہم مساواتوں (ا) اور (ب) سے دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{ر}{و} = \frac{رَ}{وَ}$$

کیونکہ ہر ایک نسبت وہ نسبت ہے جو کرہ کے نصف قطر کو و ج کے ساتھ ہے۔

اگر ڈوری نا امتداد پذیر ہے تو طول ل معلومہ ہے اور اِس لیے مساواتوں (د) سے طول و ف، و ق پوری طرح معلوم ہوتے ہیں۔ لیکن فرض کرو کہ ڈوری امتداد پذیر ہے اور فرض کرو کہ اس کا فطری طول ا اور مقیاس لہ ہے۔ اب ل ایک نامعلوم مقدار ہے اور اِس کے لیے ہمیں ایک زائد مساوات نامعلوم مقداروں کے درمیان حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے :

$$ت = لہ \frac{ل - ا}{ا}$$

اب چونکہ مساوات (ج) سے مقدار ت × و ج کے لیے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

اِس لیے

$$\text{ت} \times \text{وج} = \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ا}}\,\text{ل} \times \text{وج} = \text{و} \times \text{وف} = \text{وَ} \times \text{وق}$$

$$= \frac{\text{وف}}{\frac{1}{\text{و}}} = \frac{\text{وق}}{\frac{1}{\text{وَ}}} = \frac{\text{ل}}{\frac{1}{\text{و}} + \frac{1}{\text{وَ}}}$$

اِس لیے

$$\frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ا}}\,\text{ل} \times \text{وج} = \frac{\text{ل}}{\frac{1}{\text{و}} + \frac{1}{\text{وَ}}}$$

اِس مساوات سے ل کی قیمت معلوم ہو گی اور اس کو معلوم کر لینے کے بعد ہم حسب سابق عمل جاری کریں گے۔

۵ ۔ ایک وزن و کو ڈوریوں سے جنکے تناؤ ت_1، ت_2، ت_3 ..... $\text{ت}_\text{ن}$ ہیں سہارا گیا ہے۔ ڈوریاں انتصاباً نہیں لٹکتیں لیکن اِن کے مختلف زوجوں کے درمیان زاوئے صہ_{12}، صہ_{13} وغیرہ معلوم ہیں۔ وزن و کو تناؤں اور اِن زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو۔

صریحاً وزن، تناؤں ت_1، ت_2، ت_3 ..... $\text{ت}_\text{ن}$ کے حاصل کے مساوی ہے۔ (۵۶)

فرض کرو کہ ہم فضاء میں کوئی تین قائم محاور لیتے ہیں۔ فرض کرو کہ پہلی ڈوری کی سمتی جیوب التمام ل_1، م_1، ن_1 ہیں، دوسری کی ل_2، م_2، ن_2 اور علیٰ ہذا۔ تب تناؤں کو محاور کے متوازی تحلیل کرنے سے پہلے تناؤ کے اجزائے ترکیبی ہونگے

$$\text{ل}_1\text{ت}_1،\ \text{م}_1\text{ت}_1،\ \text{ن}_1\text{ت}_1$$

اسی طرح دوسرے تناؤں کے اجزائے ترکیبی کے لئے اِن کے مشابہ جملے ہیں اور اس لیے اگر حاصل کے تین اجزائے ترکیبی لا، ما، ے سے تعبیر ہوں تو

$$\text{لا} = \text{ل}_1\text{ت}_1 + \text{ل}_2\text{ت}_2 + \ldots\ldots + \text{ل}_\text{ن}\text{ت}_\text{ن}،$$

$$\text{ما} = \text{م}_1\text{ت}_1 + \text{م}_2\text{ت}_2 + \ldots\ldots + \text{م}_\text{ن}\text{ت}_\text{ن}،$$

$$\text{ے} = \text{ن}_1\text{ت}_1 + \text{ن}_2\text{ت}_2 + \ldots\ldots + \text{ن}_\text{ن}\text{ت}_\text{ن}،$$

اب چونکہ حاصل کی مقدار و کے مساوی ہے، اس لیے

$$و^2 = لا^2 + ما^2 + ے^2$$

$$= (ل_1 ت_1 + ل_2 ت_2 + \dots + ل_ن ت_ن)^2 + (م_1 ت_1 + م_2 ت_2 + \dots + م_ن ت_ن)^2 + (ن_1 ت_1 + ن_2 ت_2 + \dots + ن_ن ت_ن)^2$$

$$= ت_1^2 (ل_1^2 + م_1^2 + ن_1^2) + \dots + ۲ ت_1 ت_2 (ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2) + \dots\dots\dots$$

$$= ت_1^2 + ت_2^2 + \dots + ۲ ت_1 ت_2 جم صہ_{12} + \dots\dots$$

جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

عام مثالیں

۱۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جس کا زاویہ ا قائمہ ہے۔ اد، ب ج پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ قوتوں $\frac{1}{اب}$ (جو اب پر عمل کرتی ہے) اور $\frac{1}{اج}$ (جو اج پر عمل کرتی ہے) کا حاصل $\frac{1}{اد}$ ہے جو اد پر عمل کرتا ہے۔

۲۔ ایک نقطہ و پر قوت ف عمل کرتی ہے جس کا خط عمل اُس مستوی میں ہے جو و پر ملنے والے دو عمود وار خطوط وا، وب سے متعین ہوتا ہے۔ ف کا جزو ترکیبی سمت وا میں مقدار اور سمت کے لحاظ سے ولا سے تعبیر ہوتا ہے اور سمت وب کا جزو ترکیبی وما سے۔ ثابت کرو کہ قوت ف مقدار میں دائرہ ولاما کے قطر سے تعبیر ہوتی ہے، اِس کی سمت معلوم کرو۔

۳۔ قوتیں $ف_1$، $ف_2$، ...، $ف_ن$ جو ایک مستوی میں نقطہ و پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہیں۔ کوئی قاطع اِن کے خطوط عمل کو نقطوں $ل_1$، $ل_2$، ...، $ل_ن$ پر قطع کرتا ہے اور طول $و ل_خ$ کو مثبت خیال کیا جاتا ہے جبکہ و سے $ل_خ$ کی سمت

وہی ہو جو ف‌اخ کی ہے۔ ثابت کرو کہ ∑ ف‌اخ ا ول‌خ = ۰

۴۔ ایک جسم ایک چکنے مائل مستوی پر دو قوتوں کے ذریعہ سہارا گیا ہے، ہر قوت جسم کے نصف وزن کے مساوی ہے اور ان میں سے ایک افقی طور پر عمل کرتی ہے اور دوسری مستوی کے متوازی۔ مستوی کا میلان معلوم کرو۔

۵۔ ایک چکنے مائل مستوی کا میلان ۳۰° ہے اور اس پر ایک جسم افقی طور پر عمل کرنے والی قوت ف سے سہارا گیا ہے۔ دوسری کونسی سمت میں قوت ف عمل کر سکتی ہے اور جسم کو سہار سکتی ہے۔ اِن دو صورتوں میں مستوی پر کے دباؤ کا مقابلہ کرو۔

(۵۷) ۶۔ دو چکنے مستوی جن کے میلان عہ اور جہ ہیں ایک افقی خط ا ب پر ملتے ہیں۔ ا ب کے ایک نقطہ پر ایک چھوٹا چکنا حلقہ ہے جس میں سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے دونوں سروں پر وزن بندھے ہیں، اِن میں سے ایک وزن ایک مستوی پر اور دوسرا دوسرے مستوی پر ہے اور یہ اوزان اور حلقہ ایک ہی انتصابی مستوی میں ہیں۔ اگر اوزان توازن میں ہوں تو ڈوری کا تناؤ اور وزنوں کی نسبت معلوم کرو۔

۷۔ وزن $و_۱$ اور $و_۲$ کے دو چکنے حلقے ایک ڈوری سے مربوط ہیں اور ایک دائری تار کی محدب جانب انتصابی مستوی میں متوازن ہیں ثابت کرو کہ اگر دائرہ کے مرکز پر ڈوری کے محاذی زاویہ عہ بنے تو انتصابی کے ساتھ ڈوری کا زاویہ میلان طہ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

$$مس\ طہ = \frac{و_۱ + و_۲}{و_۱ - و_۲}\ مم\ \frac{عہ}{۲}$$

۸۔ دو اوزان ایک کھردرے مستوی پر ساکن ہیں، یہ اوزان ایک ڈوری سے مربوط ہیں جو مستوی کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے۔ اگر زاویہ میلان عہ، زاویہ رگڑ صہ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ کمتر وزن کو بڑے وزن کے ساتھ کم سے کم نسبت $\frac{جب\ (عہ - صہ)}{جب\ (عہ + صہ)}$ ہے۔

۹۔ دو وزن ایک کھُردرے دوہرے مائل مستوی پر ایک دوسرے کو ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو راس پر سے گذرتی ہے سہارے ہوئے ہیں اور دونوں اوزان عین حرکت کرنے کو ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مستوی کو جھکایا جائے یہانتک کہ دونوں اوزان پھر حرکت کرنے کو ہوں تو وہ زاویہ جس میں سے مستوی کو جھکانا ہوگا رگڑ کے زاویہ کا دُگنا ہوگا۔

۱۰۔ دو اوزان ف اور ق ایک ہی مادی شئے سے بنائے گئے ہیں، یہ اوزان ایک دوہرے مائل مستوی پر ساکن ہیں اور ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو مشترک راس پر سے گذرتی ہے مربوط ہیں۔ اِن میں سے وزن ق مستوی کے نیچے حرکت کرنے کو ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو توازن کے خلل کے بغیر ف میں جمع کیا جا سکتا ہے حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{ف جب ۲ صہ جب (عہ + بہ)}}{\text{جب (عہ - صہ) جب (بہ - صہ)}}$$

جہاں مستویوں کے زوایائے میلان عہ اور بہ ہیں اور زاویہ رگڑ صہ ہے۔

۱۱۔ ایک جسم ایک کھُردرے مائل مستوی پر ایک قوت کے ذریعہ جو مستوی میں عمل کرتی ہے سہارا گیا ہے۔ اگر قوت کی کم سے کم مقدار جبکہ مستوی افق سے زاویہ عہ پر مائل ہو اُس قوت کی بڑی سے بڑی مقدار کے مساوی ہو جبکہ مستوی افق سے زاویہ بہ پر مائل ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کا زاویہ $\frac{1}{2}$ (عہ - بہ) ہے۔

۱۲۔ وزن و کے دو مساوی چھلّے ایک پردے کی ڈنڈی پر حرکت کر سکتے ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ چھلے طول ل کی ایک ڈھیلی ڈوری سے مربوط ہیں جو ایک چکنے چھلے کے ذریعہ وزن و۱ کو سہارتی ہے۔ چھلے ایک دوسرے سے کتنے فاصلہ پر ہونے چاہئیں کہ وہ ایک دوسرے سے قریب آکر نہ ملیں۔

۱۳۔ مختلف مادی اشیاء سے بنے ہوئے دو اوزان ف اور ق ایک کھُردرے مستوی پر رکھے گئے ہیں۔ مستوی کا میلان طہ ہے اور اوزان ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط ہیں جو مستوی اور افق کے خط تقاطع سے ۴۵° پر مائل ہے۔ دونوں وزن حرکت کے نقطہ پر ہیں۔ ف اور ق کی رگڑ کی قدر یں

معلوم کرو اگر یہ معلوم ہو کہ اوپر کے وزن کی قدر نیچے کے وزن کی قدر سے دُگنی ہے۔

۱۴۔ ایک وزنی حلقہ خروج المرکز ز کے ایک چکنے ناقصی تار پر جو انتصابی مُستوی میں ہے آزادانہ پھسل سکتا ہے۔ ناقص کا محور اعظم افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور ایک ڈوری جو حلقے سے بندھی ہے ناقص کے مرکز پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے اور مساوی وزن کے ایک جسم کو سہارتی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقے اور تار کے نقطہ تماس پر تار کا مماس محور اعظم کے ساتھ جو زاویہ فہ بناتا ہے حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

مس (فہ + عہ) (قط^2 فہ ـ ز^2) = ز^2 مس فہ

۱۵۔ دو چھوٹے چکنے حلقے جنکے وزن و، و' ہیں ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط کئے گئے ہیں اور وہ دو ثابت تاروں پر پھسلتے ہیں، اِن میں سے پہلا انتصابی ہے اور دوسرا افق سے زاویہ عہ پر مائل ہے۔ ایک وزن ف ڈوری سے باندہ دیا گیا ہے اور اِس ڈوری کے دو حصے انتصابی کے ساتھ زاوئے طہ، فہ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

ظم طہ : ظم فہ : ظم عہ = و : ف + و : ف + و + و'

۱۶۔ نا مساوی کمیت کے دو ذرّے ایک تیسرے ذرہ کے ساتھ مہین نا متمدا پذیر ڈوریوں کے ذریعہ باندہ دئے گئے ہیں۔ وہ ایک کھُردرے مائل مُستوی پر پڑے ہیں اور ڈوریاں تنی ہوئی ہیں اور مُستوی میں افقی خط کے ساتھ زاوئے عہ، بہ بناتی ہیں۔ کم سے کم افقی قوت کی مقدار اور سمت معلوم کرو جس کو تیسرے ذرہ پر لگانے سے تینوں ذرّے حرکت کرنے لگیں۔

۱۷۔ ایک وزنی ذرہ ایک کھُردرے مائل مُستوی پر جس کا میلان عہ رگڑ کے زاویہ کے مساوی ہے رکھا گیا ہے۔ ایک ڈوری ذرہ سے باندہ دی گئی ہے جو ایک سوراخ میں سے جو مُستوی میں ذرہ سے نیچے وار ہے گذرتی ہے لیکن وہ اِس نقطہ میں سے گذرنیوالے خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سوراخ میں سے ڈوری کو بتدریج کھینچا جائے تو ذرہ ایک خط مستقیم اور ایک نیم دائرہ علی التواتر مرتسم کرے گا۔

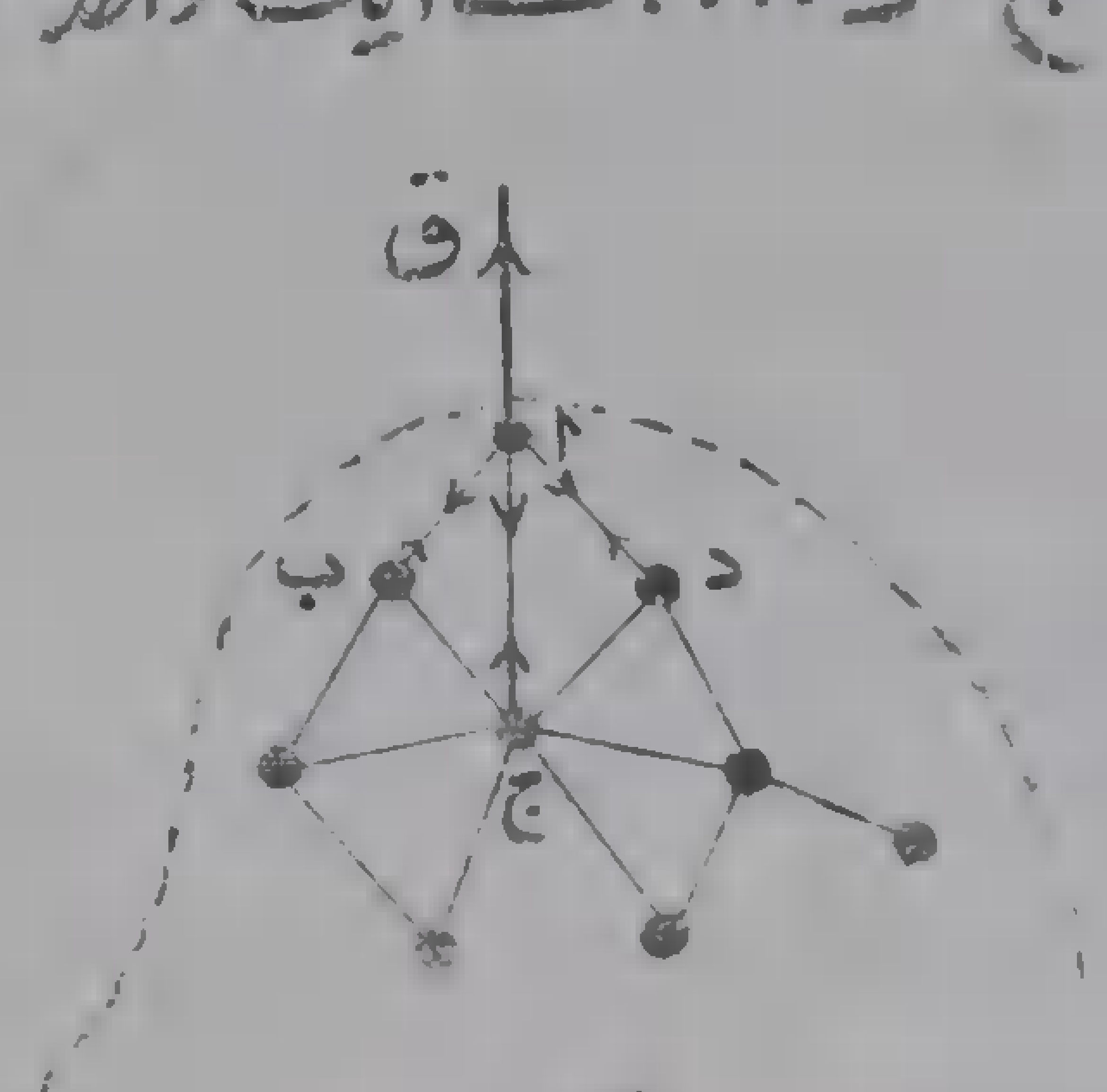
(۵۹)

چوتھا باب

ذروں کے نظاموں کا علم سکون

۴۴ — ہم نے ابتک ایک واحد ذرہ پر قوتوں کے عمل سے بحث کی ہے لیکن مسئلوں کی ایک مختلف جماعت پیدا ہوتی ہے جب ہم ایک جسم پر جو ذروں کی ایک بہت بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہوتا ہے قوتوں کے عمل کا مطالعہ کرتے ہیں جبکہ قوتیں اس طریقہ سے لگائی جائیں کہ وہ جسم کے مختلف ذروں پر عمل کریں۔

فرض کرو کہ قوت ق، ایک جسم کے ذرہ ا پر لگائی گئی ہے جبکہ جسم ذروں ا، ب، ج، د ..... کی ایک بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہے۔ اگر ذرہ ا پر دوسرے ذروں ب، ج، د ..... کا کوئی اثر نہ ہوتا تو ذرہ ا قوت عاملہ کے زیر عمل حرکت کرنے لگتا اور جلد دوسرے ذروں ب، ج، د..... سے جدا ہو جاتا۔ لیکن اگر ذروں ا، ب، ج، د ..... سے ایک واحد مسلسل جسم کی ترکیب ہوئی ہے تو ایسا وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ فی الحقیقت جوں ہی ذرہ ا، دوسرے ذروں کے لحاظ سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے ذرہ ا اور متصلہ ذروں ب، ج، د..... کے درمیان اعمال اور تعاملات کے نظامات ظہور پذیر ہو جاتے ہیں۔



شکل (۳۱)

چنانچہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ا پر عمل کرنے والی قوتیں ا کی حرکت کو رُوکنے کا میلان رکھتی ہیں اور متناظر تعاملات ذروں ب، ج، د، ... میں حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتے ہیں۔ جب ب، ج، د، ... حرکت کی ابتدا کرتے ہیں تو قوتوں کے دیگر نظامات ب، ج، د، ... کے متصلہ ذروں پر عمل کرنے لگتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طرح تمام ذرے حرکت میں آتے ہیں اور صرف ذرہ ا کے ہی حرکت کرنے کی بجائے پورا جسم حرکت کرتا ہے۔

(۶۰) اب ہم غور کریں گے کہ آیا ایسا جسم یا اجسام کا نظام حرکت کرے گا یا ساکن رہے گا جبکہ قوتوں کے نظامات بیرونی جانب سے اس کے مختلف ذروں پر عمل کریں۔ لیکن ہمیں ہمیشہ یہ یاد رکھنا چاہئے کہ وہ قوتیں جو بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں صرف وہی جسم پر عمل کرنے والی نہیں ہیں بلکہ اِن کے ساتھ وہ اعمال اور تعاملات بھی ہوتے ہیں جو مختلف ذروں کے درمیان ظہور پذیر ہوتے ہیں۔

۴۵ ۔ اِس آخری واقعہ کا ایک نتیجہ فوراً ظاہر ہے۔ کسی جسم کے ایک ذرہ ا پر ایک قوت لگانا اور اِس کے دوسرے ذرہ ب پر ٹھیک اتنی ہی متشابہ قوت لگانا یہ دونوں امور ایک ہی نہیں ہیں۔ کیونکہ اندرونی اعمال اور تعاملات کے نظامات دونوں صورتوں میں مختلف ہوں گے۔ کسی سادہ مثال سے معلوم ہو جائے گا کہ حاصل حرکت بھی بالعموم مختلف ہوگی، مثلاً کرسی کے پشت کے وسطی نقطہ پر کوئی اُفقی قوت لگائی جائے تو وہ ممکن ہے کرسی کو اُلٹ دے لیکن اگر اتنی ہی متشابہ قوت کرسی کے پایہ پر لگائی جائے تو وہ کرسی کو زمین پر گھسیٹے گی اور نیز اِس کو ایک انتصابی محور کے گرد گھمائے گی۔

وہ محل جہاں ذرہ ہے جبکہ اِس پر قوت لگائی جاتی ہے قوت کا نقطہ عمل کہلاتا ہے۔ وہ خط جو اِس نقطہ میں سے قوت کی سمت میں کھینچا جائے قوت کا خط عمل کہلاتا ہے۔

کسی قوت کے عمل سے متعلق جتنی چیزیں معلوم ہونی چاہئیں وہ

صریحاً حسب ذیل ہیں:

(ا) اس کی مقدار،

(ب) اس کا نقطہ عمل،

(ج) اس کا خط عمل

معیار

۴۶ ۔ **تعریف** ۔ کسی قوت کا معیار ایک خط کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القوائم ہو قوت اور اُس اقل فاصلہ کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو اِن دو خطوں کے درمیان ہے۔

یہ معیار جیسا کہ ہمیں جلد معلوم ہوگا اُس خط کے گرد گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے جس کے گرد معیار کی پیمائش کیجاتی ہے، مثلاً اگر ایک ترازو کے بازو کا طول ل ہو تو اِس کے سرے پر وزن و کا معیار ترازو کے نصاب کے گرد ل و ہوگا اور ہمیں معلوم ہوگا کہ یہ معیار بازو کو گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے۔

تعریف ۔ کسی قوت کا معیار ایک خط ل کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القوائم نہ ہو وہی ہوتا ہے جو ل کے عمود وار مستوی میں قوت کے جزو ترکیبی کا معیار ل کے گرد ہے۔

قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں یعنے ل کے متوازی اور اِس کے عمود وار تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ اول الذکر سے ل کے گرد گھمانے کا کوئی میلان حاصل نہیں ہوگا اور اس لیے صرف دوسرے جزو ترکیبی سے ہی گھمانے کا پورا میلان حاصل ہوتا ہے۔ (۶۱)

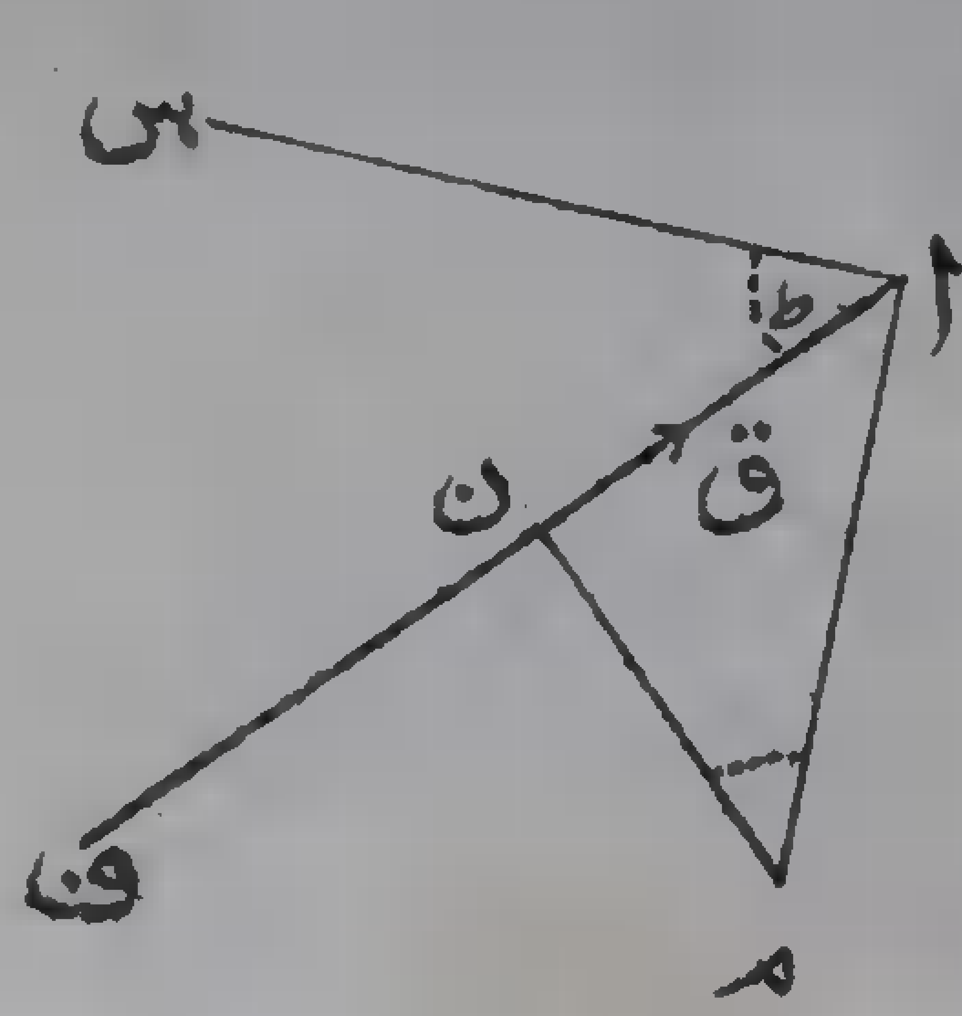
متذکرۂ صدر دو تعریفیں کسی خط ل کے گرد کسی قوت ق کے معیار کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔ صریحاً معیار معدوم ہوگا اگر

(ا) ق کا خط عمل، ل کے متوازی ہو،

(ب) ق کا خط عمل، ل کو قطع کرے۔

کیونکہ ظاہر ہے کہ اِن میں سے کسی صورت میں ل کے گرد گھمانے کا میلان صفر ہوتا ہے۔

۴۷۔ فرض کرو کہ خط ل، کاغذ کے مُستوی پر عمود ہے اور اس کو نقطہ م پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کاغذ کے مُستوی میں ایک قوت ق کا خطِ عمل ف ا ہے اور قوت نقطہ ا کے ذرہ پر عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ م سے ن ا پر عمود م ن کھینچا گیا ہے۔ تب بموجب تعریف قوت ق کا معیار خط ل کے گرد ق × م ن ہے۔



شکل (۳۲)

فرض کرو کہ زاویہ ف ا س، زاویہ ن م ا کے مساوی کھینچا گیا ہے اور یہ زاویہ طہ کے مساوی ہے، اِس لیے ا س، م ا پر عمود ہے۔ اب قوت ق کا معیار خط ل کے گرد

= ق × م ن

= ق × ا م جم طہ

= ا م × ق جم طہ

= ا م × ق کا جزو تحلیلی خط س ا کی سمت میں۔

ہم نے فرض کیا تھا کہ ا پر عمل کرنے والی قوت ق ہے، اِس کی بجائے فرض کرو کہ ق، کسی دوسری قوت ر کا جزو تحلیلی اُس مستوی میں ہے جو خط ل کے عمود وار ہے۔ اب ل کے گرد ر کا معیار بموجب تعریف وہی ہے جو ق کا معیار ہے، اور ر کا جزو تحلیلی خط ا س کی سمت میں = ق جم طہ۔ اِس لیے جو کچھ ثابت ہوا ہے اِس کو شکل ذیل میں رکھا جا سکتا ہے

ل کے گرد کسی قوت ر کا معیار جو ا پر عمل کرتی ہے

= ا م × ر کا جزو تحلیلی خط س ا کی سمت میں۔

اب س ا سمت میں متعین ہو جاتا ہے کیونکہ وہ ل پر اور نیز ا م پر عمود ہے

جہاں ام، ا سے ل پر عمود ہے۔ اس لیے معیار کی ایک نئی تعریف ہمیں (۶۲
ملتی ہے جو قبل الذکر تعریف کے بالکل مماثل ہے یعنی:

کسی خط ل کے گرد ا پر عمل کرنے والی قوت کا معیار دو مقداروں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جن میں سے ایک مقدار ام ہے جو ا سے ل پر عمود ہے اور دوسری مقدار ر کا جزو ترکیبی اُس سمت میں ہے جو ام اور ل دونوں پر عمود ہے۔

۴۸ ۔ معیار کے اِس تخیل سے ہمیں فوراً حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

کسی خط ل کے گرد ا پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ، ل کے گرد اِن قوتوں کے حاصل کے معیار کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ یہ قوتیں ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$ .... ہیں اور اِن کا حاصل ر ہے۔ فرض کرو کہ ام حسب دفعہ (۴۷) ا سے ل پر عمود ہے اور فرض کرو کہ اس وہ سمت ہے جو ام اور ل دونوں پر عمود ہے۔ یہ مسئلہ ثابت شدنی یہ ہے کہ

ام × ر$_1$ کا جزو ترکیبی اس کی سمت میں
+ ام × ر$_2$ کا " " " "
+ ام × ر$_3$ کا " " " "
....
= ام × ر کا جزو ترکیبی اس کی سمت میں

اِس مساوات کی طرفین کو ام سے تقسیم کرنے سے مسئلہ صرف یہ رہ جاتا ہے کہ ر کا جزو ترکیبی سمت اس میں = سمت اس میں ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$ .... کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ، اور یہ بالکل درست ہے۔

اب ہم زیادہ واضح طور پر معلوم کر سکتے ہیں کہ کس طرح ایک قوت کے معیار سے گھمانے کے میلان کا ناپ حاصل ہوتا ہے۔ شکل (۳۲) میں ہم نے ایک خط ل کے گرد جو کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور اِس سے نقطہ م پر

ملتا ہے معیار لیا ہے۔ وہ قوت جس کا معیار زیر بحث ہے ایک قوت س کا ہے جو ا پر عمل کرتی ہے۔ ا پر تین سمتیں باہم علی القوائم ہوں گی یعنی اس، ام، اور اس خط کی سمت جو ا میں سے ل کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

س کا معیار ل کے گرد حسب تعریف

ام × س کا جزو ترکیبی سمت اس میں

ہے۔

اب س کا جزو ترکیبی سمت ام میں ایک ایسی قوت ہے جس کا خط عمل، ل کو قطع کرتا ہے اور اس لیے ل کے گرد جسم کو گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا۔ اسی طرح س کا جزو ترکیبی اس خط کے گرد جو ا میں سے اس کے متوازی کھینچا گیا ہے ل کے گرد گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا۔ اس طرح س کو تین اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جن میں سے صرف پہلا جزو ترکیبی یعنی جو اس کی سمت میں ہے ل کے گرد گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔ ہم نے پوری قوت س کے معیار کی تعریف اس طریقہ پر کی ہے کہ وہ قوت کے اجزائے ترکیبی میں سے اس جزو ترکیبی کے معیار کے مماثل ہو جاتا ہے جو گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ معیار کی علامت بھی ہوتی ہے اور مقدار بھی۔ کسی قوت س کے خط عمل پر حرکت کرنے میں ہم خط ل کے گرد ایک سمت میں گھوم سکتے ہیں یا دوسری سمت میں۔ ہم اس امر پر اتفاق کرتے ہیں کہ جب گھماؤ ایک سمت میں ہو تو س کا معیار ل کے گرد مثبت سمجھا جائے گا اور دوسری سمت میں ہو تو منفی۔

۴۹ ۔ اگر ایک ذرہ متعدد قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہو تو ان تمام قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہیئے۔ ان مختلف قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ خواہ یہ معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں حاصل کے معیار کے مساوی ہوگا اور اس لیے وہ بھی صفر ہونا چاہیئے۔

پس ہم حسب ذیل نتیجہ پر پہنچتے ہیں:

جب ایک ذرہ کسی قوتوں کے زیرِ عمل توازن میں ہو تو کسی خط کے گِرد اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

ذروں کے نظامات توازن میں

۵۰ — فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام متعدد قوتوں کے زیرِ عمل توازن میں ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں دو قسم کی ہوتی ہیں:

(ا) بیرونی قوتیں، یہ وہ قوتیں ہیں جو بیرونی جانب سے ذرہ پر عمل کرتی ہیں مثلاً ذرہ کا وزن۔

(ب) اندرونی قوتیں، یہ وہ قوتیں ہیں جو اِس ذرہ اور نظام کے باقی دیگر ذروں کے درمیان اندرونی طور پر عمل کرتی ہیں۔

اب اگر ذروں کا پورا نظام توازن میں ہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر ذرہ جداگانہ طور پر توازن میں ہونا چاہئے۔ پس دفعہ ۴۳ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۶۴)

(ا) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں لیے جائیں تو اِن کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے۔

اور دفعہ ۴۸ میں ثابت شدہ مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

(ب) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں تو اِن کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

لیکن اگر ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو تو عمل جمع سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام ذروں پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ بہر حال خود معدوم ہوگا کیونکہ اندرونی قوتیں اعمال اور تعاملات کے ازواج پر مشتمل ہوتی ہیں اور قوتوں کے

کسی ایسے زوج کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں مساوی اور مخالف ہوتے ہیں چونکہ کل مجموعہ معدوم ہوتا ہے اور اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اس لیے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔

اسی طرح وہ مسئلہ بھی جو بیرونی قوتوں کے معیاروں کے لیے مسئلہ بالا کے جواب میں ہے درست ہے۔ کسی خط ل کے گرد تمام اندرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ایک عمل اور تعامل کے معیار مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ اندرونی اور بیرونی تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے معیاروں کا ہر مجموعہ جداگانہ صفر ہے۔ پس بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے۔

اِس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلے ثابت کردئے:

جب ذروں کا ایک نظام بیرونی قوتوں کے کسی نظام کے زیر عمل توازن میں ہو تو

(ا) کسی سمت میں اِن تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوتا ہے،

(ب) کسی خط کے گرد اِن تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

عام زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مسئلے اس امر کو بیان کرتے ہیں کہ کسی سمت میں بڑھنے کا یا کسی خط کے گرد گھومنے کا کوئی میلان نہیں ہے۔

(۶۵)

توضیحی مثال

چرخ اور محور۔ اِس آلہ میں جو "چرخ اور محور" کے طور پر مشہور ہے ایک دائری محور ہوتا ہے جو اپنے مرکزی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور اِس کے ساتھ ایک دائری پہیہ استوار طور پر لگا ہوتا ہے؛ پہیہ کا مرکز اور محور کا مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ ایک رسی یا ڈوری محور کے گرد لپٹی جاتی ہے اور اس کے سرے پر

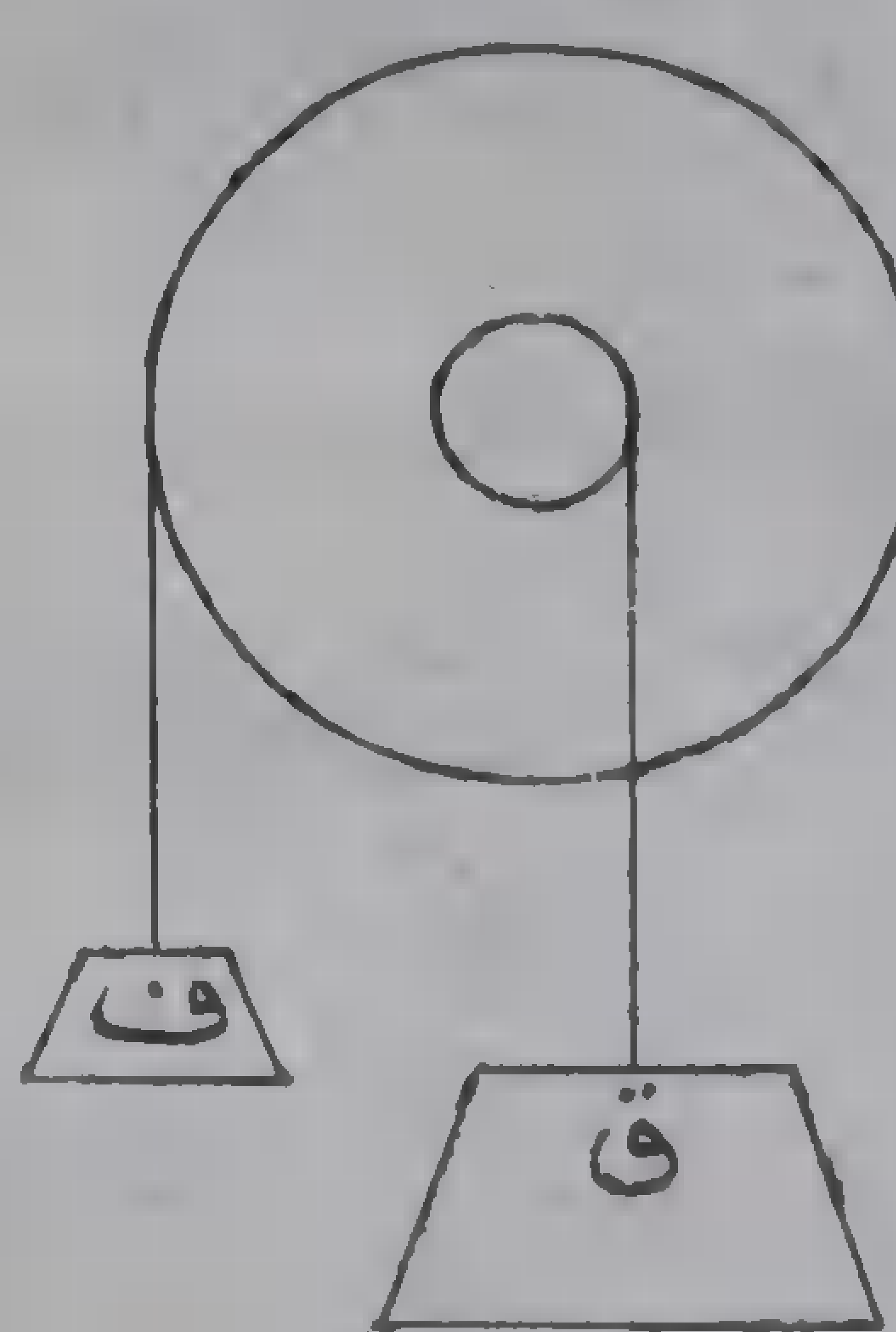
ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ ایک دوسری رسی یا ڈوری پہیہ کے محیط کے گرد مخالف سمت میں لپٹی جاتی ہے اور اِس کے سرے پر بھی ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ اِن دو اوزان کی نسبت کو مناسب طور پر منتخب کرکے اِس آلہ کو متوازن کیا جا سکتا ہے اِس طور پر کہ وہ اپنے محور کے گرد گھومنے کا کوئی میلان نہ رکھے۔

اب ہم اس نظام کے توازن پر غور کرتے ہیں جس میں چرخ اور محور اور رسیوں یا ڈوریوں کے وہ حصے شامل ہیں جو اِن کے گرد لپیٹے گئے ہیں۔ مسئلہ کو سادہ بنانے کے لیے ہم اِس نظام کے وزن کو بالکل نظرانداز کریں گے۔ اب بیرونی قوائے عاملہ حسب ذیل ہیں:

(ا) چرخ کے گرد لپٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ب) محور کے گرد لپٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ج) اُن سہاروں کا عمل جو چرخ اور محور کو گرنے سے بچاتے ہیں۔



شکل (۳۳)

فرض کرو کہ اوزان ف اور ق سے تعبیر ہوتے ہیں اس لیے وہ رسیوں کے تناؤ بھی ہیں۔ فرض کرو کہ چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ا، ب ہیں۔ اب ہم ریاضیاتی زبان میں اس امر کو بیان کریں گے کہ بیرونی قوائے عاملہ کے معیاروں کا مجموعہ جبکہ انہیں محور کے گرد لیا جائے صفر ہے۔

چرخ پر کی رسی کے تناؤ کا معیار ف ا ہے کیونکہ تناؤ کی مقدار ف ہے جو محور کے علی القوائم عمل کرتا ہے اور ا وہ چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے جو محور اور اِس تناؤ کے خط عمل کے درمیان ہے اسی طرح قوت (ب) کا معیار - ق ب ہے منفی علامت اس وجہ سے لی گئی ہے کہ یہ قوت نظام کو اُس سمت میں گھمانے کا میلان رکھتی ہے جو اُس سمت کے

مخالف ہے جس میں پہلا تناؤ گھمانے کا میلان رکھتا ہے۔
اگر ہم یہ خیال کریں کہ یہ نظام خود محور پر عمل کرنے والی قوتوں سے سہارا ہوا ہے تو قوتوں (ج) کا معیار معدوم ہوگا کیونکہ اِن قوتوں کے خطوط عمل اُس خط کو قطع کرینگے جس کے گرد معیار لیے جا رہے ہیں۔ اس لیے مطلوبہ مساوات ہے

ف ا - ق ب = ۰

یہ مساوات صرف یہ ظاہر کرتی ہے کہ

[نظام کو گھمانے میں ف کا میلان] - [نظام کو گھمانے میں ق کا میلان] = ۰

اِس لیے جب نظام متوازن ہو اس طور پر کہ وہ ساکن رہ سکے تو ہمیں حاصل ہونا چاہیئے

ف : ق = ب : ا

یعنے اوزان نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہونے چاہئیں۔ چرخ اور محور کے اصُول کی عملی مثالیں ڈنڈا چرخ اور لنگر چرخ ہیں۔

(۶۶)

مثالیں

۱۔ آٹھ ملاح جن میں سے ہر ایک ۱۰۰ پونڈ کی افقی قوت سے ایک لنگر چرخ کے بازو پر مرکز سے ۸ فٹ کے فاصلہ پر زور لگا رہا ہے لنگر کو عین اُٹھا سکتے ہیں لنگر چرخ کے محور کا نصف قطر ۱۲ انچ ہے۔ اُس زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جو لنگر اُٹھاتی ہے۔

۲۔ شکل ۳۳ کے آلہ میں وزن ف کو جدا کر لیا گیا ہے اور رسی کے آزاد سر کو ق پر اُسی نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے جس پر دوسری رسی کا سرا بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں یہ نقطہ انتصاباً محور کے نیچے ہوگا۔

۳۔ ایک پہیہ ایک افقی محور کے گرد گھومنے میں آزاد ہے اور اس پر دو رسیاں بندھی ہیں جو اس کے محیط کے گرد مخالف سمتوں میں لپٹی ہوئی ہیں دوسرے دونوں سرے ایک چھوٹے حلقہ سے بندھے ہیں جس سے ایک وزن لٹکا ہوا ہے ثابت کرو کہ جب یہ نظام ساکن ہو تو یہ دو رسیاں انتصابی کے ساتھ مساوی زاویے بنائینگی۔

۴۔ ایک شخص ایک قفلی گیٹ کو اس کی چول سے ۸ فٹ کے فاصلہ سے ۱۵۰ پونڈ کی افقی قوت لگا کر پانی کے دباؤ کے خلاف عین حرکت دے سکتا ہے۔

اُسے کتنی قوت لگانی ہوگی اگر وہ چول سے ۹ فٹ کے فاصلہ سے دبائے۔

۵ — ایک پہیہ ایک افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اس کے ایک آرے (Spoke) کے سرے پر ۲ پونڈ کا ایک وزن باندھ دیا گیا ہے اور یہ آرا اُفقی کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔ پہیہ کے ایک افقی آرے کے سرے پر کتنا وزن باندھنا چاہیئے کہ وہ حرکت کو وقوع پذیر ہونے سے روک سکے۔

۶ — ایک قنطرہ[1] کو ایک زنجیر کے ذریعہ جو قبضوں سے بعید ترین سرے پر بندھی ہوئی ہے اٹھایا جاتا ہے۔ جب پُل افقی محل میں ساکن ہوتا ہے تو زنجیر پُل کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے اور زنجیر کا تناؤ جو پُل کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے تین ٹن کے وزن کے مساوی ہے۔ بتاؤ کہ زنجیر میں اور کتنا زائد تناؤ مطلوب ہوگا جبکہ ایک ٹن کا وزن پُل کے وسطی نقطہ پر رکھدیا جائے۔

قوتیں ایک مستوی میں

۵۱ — سکونیات میں سادہ ترین مسائل ہمیشہ وہ ہوتے ہیں جن میں تمام قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مستوی میں ہوں۔ کسی ایسے مسئلہ میں صریحاً سب سے زیادہ سہولت اس میں ہوگی کہ معیاروں کو ایک ایسے خط کے گرد لیا جائے جو اُس مستوی پر عمود ہو جس میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کوئی ایسا خط مستوی کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو ہر قوت اُس خط کے کاملاً عمود وار ہوگی جس کے گرد معیار لیے جا رہے ہیں اور اس لیے معیار، قوت اور اُس چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کا حاصل ضرب ہوگا جو قوت کے خط کے عمل کا نقطہ ن سے ہے۔

جب معیار ایک ایسے محور کے گرد لیے جاتے ہیں جو قوتوں کے مستوی کو علی القوائم نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو اکثر یہ کہا جاتا ہے کہ معیار نقطہ ن کے گرد لئے گئے ہیں اور اس صورت میں اُس عمود کو جو نقطہ ن سے قوت کے خط عمل پر کھینچا جاتا ہے قوت کے معیار کا بازو کہتے ہیں۔ (۶۷)

۵۲ — مسئلہ۔ جب تین قوتیں ایک جسم پر یا اجسام کے ایک نظام پر

[1] Drawbridge

ایک مستوی میں عمل کرے اس کو توازن میں رکھیں تو یہ تین قوتیں ایک نقطہ پر ملنی چاہئیں۔

فرض کرو کہ قوتیں ف، ق، ر ہیں اور فرض کرو کہ ف اور ق نقطہ ا پر متقاطع ہوتی ہیں۔ اب ا کے گرد قوتوں ف، ق، اور ر کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ ہم جانتے ہیں کہ ف اور ق کے معیار معدوم ہوتے ہیں۔ اِس لیے ا کے گِرد ر کا معیار معدوم ہونا چاہئے یعنی ر کو نقطہ ا میں سے گذرنا چاہئے یا با الفاظ دیگر یہ تین قوتیں ایک واحد نقطہ پر متقاطع ہونی چاہئیں۔

اس اصول کا اطلاق سکونیاتی مسئلوں کو حل کرنے کے لیے اکثر خود کافی ہوتا ہے کیونکہ قوائے عاملہ تین قوتوں میں تحویل کی جا سکتی ہیں۔

توضیحی مثالیں

۱۔ Seesaw ۔ وزن و۱، و۲ کے دو آدمی ایک تختہ پر کھڑے ہیں جو ایک کھردرے سہارے پر جس کے گرد وہ آزادانہ گھوم سکتا ہے ٹکا ہوا ہے۔ تختہ کا وزن نظر انداز کرکے معلوم کرو کہ آدمیوں کو کہاں کھڑے ہونا چاہئے کہ تختہ متوازن ہو۔

قوتوں کو ایک مستوی سطح میں جو تختہ کے مرکزی خط میں سے انتصاباً گذرتی ہے عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔ یہ قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن و۱ جو ایک شخص کا ہے جو ایک سرے پر ہے۔



(ب) وزن و۲ جو دوسرے شخص کا ہے جو دوسرے سرے پر ہے،

(ج) تختہ اور اس کے سہارے کے درمیان تعامل۔

شکل (۳۴)

فرض کرو کہ سہارے سے آدمیوں کے فاصلے ا، ب ہیں۔ اب سہارے کے نقطہ کے گرد معیار لینے سے

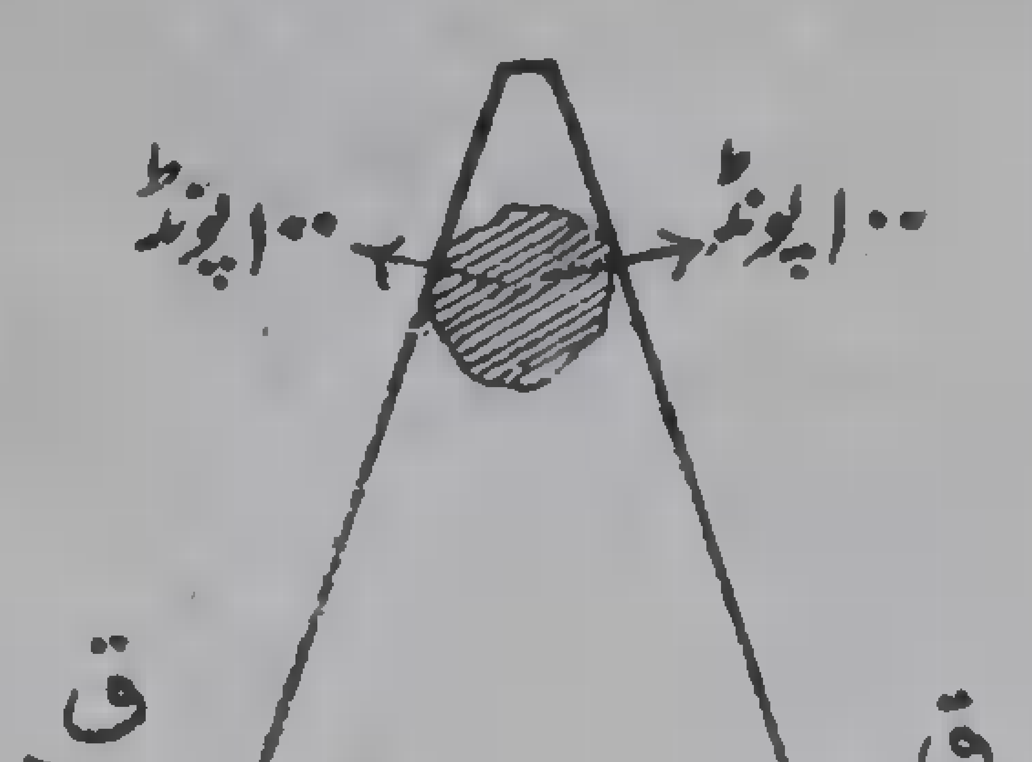
و ا - و ب = ۰

اِس لئے اِن دو آدمیوں کو سہارے سے ایسے فاصلوں پر کھڑے ہونا چاہئے جو اِن کے اوزان کے بالعکس متناسب ہوں۔

یاد رہے کہ اِس مسئلہ میں نظام پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں جو ایک نقطہ پر ملتی ہیں، یہ نقطہ لاتناہی پر ہے۔

(۶۸) ۴ - سروتہ - یہ معلوم کیا گیا کہ چھالیہ کی ایک ڈلی پر ۱۰۰ پونڈ کا وزن رکھنے سے وہ عین پھوٹتی ہے۔ معلوم کرو کہ ایک سروتہ کے بازوؤں کے سِروں پر کتنی قوت لگائی جائے کہ چھالیہ پھوٹ جائے جبکہ وہ قبضہ سے $\frac{1}{2}$ انچ کے فاصلہ پر رکھی ہوئی ہو اور بازو ۶ انچ لمبے ہوں۔

فرض کرو کہ ہر بازو کے انتہائی سِرے پر قوت ق لگانے سے وہ چھالیہ کو پھوڑنے کے لیے عین کافی ہوتی ہے۔ اِس لیے جب بازو کے سِرے پر قوت ق لگائی جاتی ہے تو چھالیہ اور بازو کے درمیان دباؤ ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہونا چاہئے۔ اِس طرح سروتہ کے کسی ایک بازو پر بیرونی جانب سے عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہوں گی:



شکل (۳۵)

(ا) قوت ق جو بازو کے سِرے پر لگائی گئی ہے،

(ب) ۱۰۰ پونڈ وزن کا دباؤ جو چھالیہ بازو پر قبضہ سے $\frac{1}{2}$ انچ فاصلہ پر لگاتی ہے،

(ج) تعامل قبضہ پر۔

سروتہ کا وزن یہاں نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

قبضہ کے گرد معیار لینے سے

$$۶ \times ق = \frac{1}{2} \times ۱۰۰ \text{ پونڈ وزن}$$

$$\text{اِس لیے} \quad ق = ۸\frac{1}{3} \text{ پونڈ وزن}$$

نوٹ - جب کوئی نامعلوم قوت مفروضات میں داخل ہو نہ جواب میں

مطلوب ہو مثلاً قوت (ج) تو ہم ہمیشہ ایسی مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں جن میں یہ قوت واقع نہ ہو اور یہ اس طرح کہ ہم اُس نقطہ کے گرد معیار لیتے ہیں جو اِس قوت کے خط عمل میں واقع ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر ایسی دو قوتیں واقع ہوں تو ہم اِن کے خطوط عمل کے نقطہ تقاطع کے گرد معیار لیکر وہ مساوات حاصل کرتے ہیں جن میں یہ قوتیں شامل نہیں ہوتیں۔

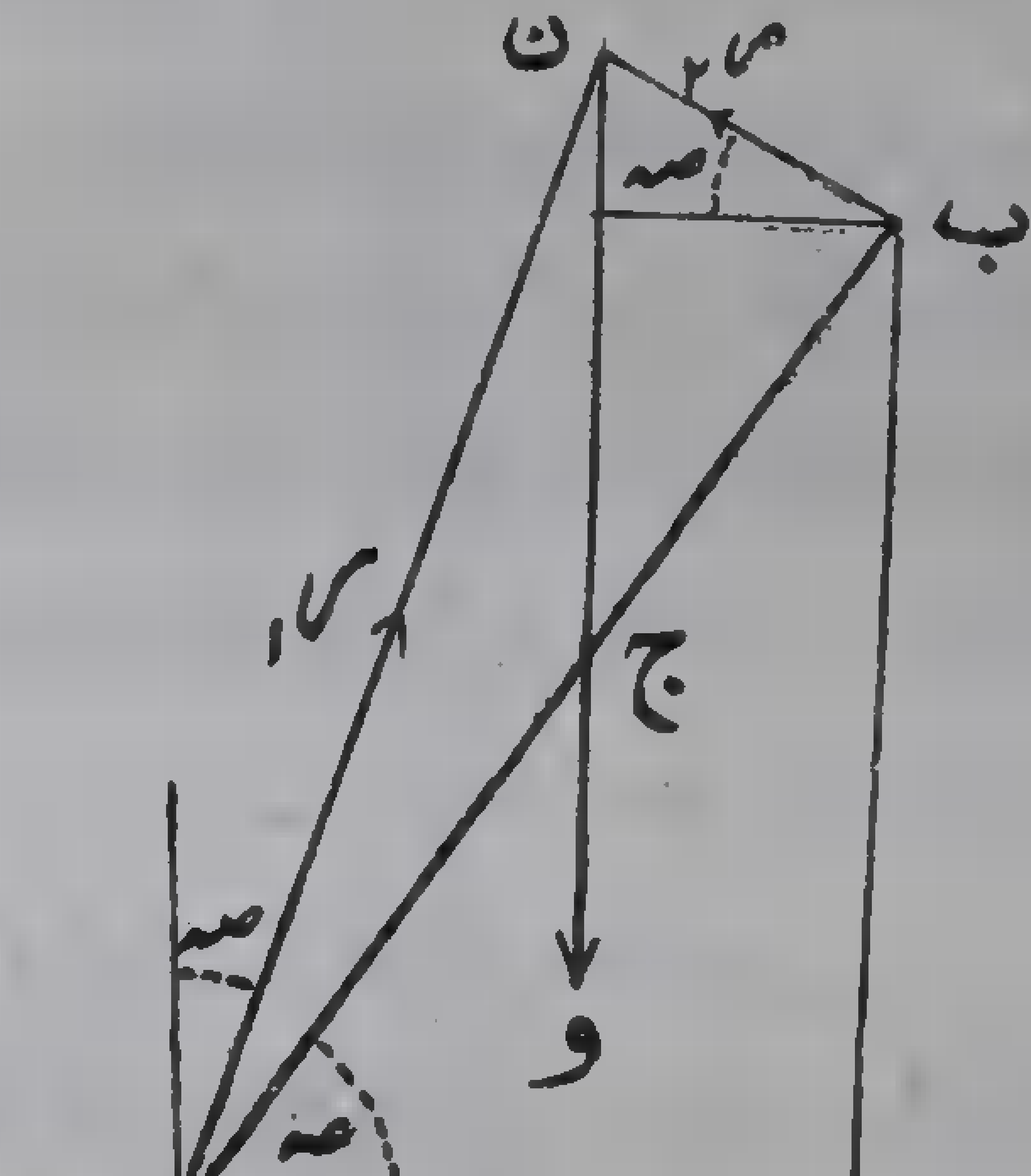
۲ - ایک سیڑھی ایک کھردرے افقی مستوی پر ایک کھردری انتصابی دیوار کے سہارے جھکی کھڑی ہے اور اِس کے سِروں کے نقاط تماس بھی اُتنے ہی کھردرے ہیں یہ معلوم کرو کہ ایک شخص سیڑھی پر کتنی دور بغیر پھسلے چڑھ سکتا ہے، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ سیڑھی کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

اِس نظام پر جس میں شخص اور سیڑھی شامل ہیں عمل کرنے والی قوتیں تین ہیں:

(ا) تعامل افقی مستوی کے ساتھ،

(ب) تعامل انتصابی دیوار کے ساتھ،

(ج) شخص کا وزن۔



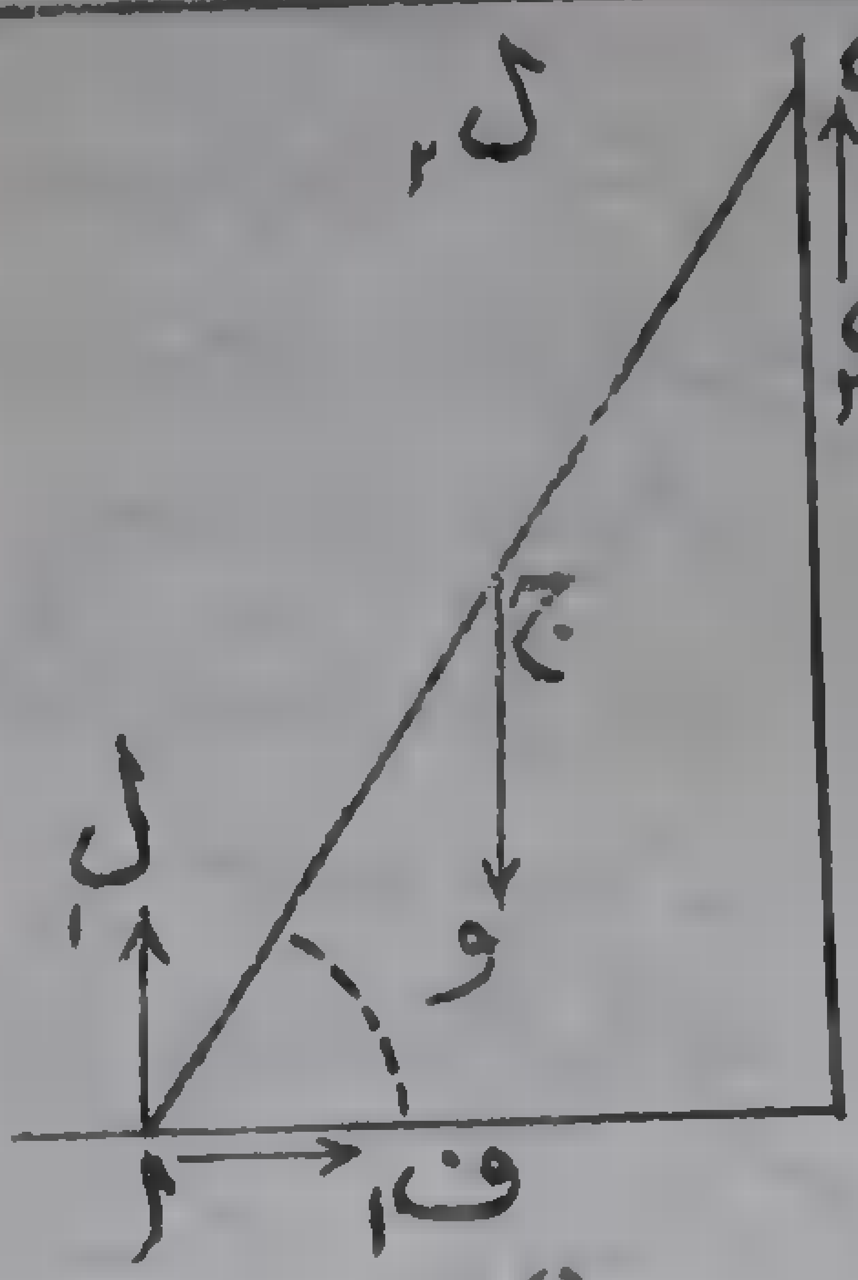
شکل (۳۶)

یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں۔ اس لیے دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کی رو سے اِن کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

شکل میں فرض کرو کہ سیڑھی اب ہے، شخص کا محل ج، اور ن وہ نقطہ جس پر تین قوتیں ملتی ہیں۔

اِس لیے ن ج انتصابی ہے، اور ا، ب پر کے تعاملات کے خطوط عمل ا ن، ب ن ہیں۔ جب پھسلن عین شروع ہونے کو ہو تو اِن میں سے ہر تعامل کو عمود کے ساتھ رگڑ کے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا چاہیئے۔ فرض کرو کہ رگڑ کا یہ زاویہ صہ ہے اور فرض کرو کہ سیڑھی کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔ اب مثلث ا ج ن کے علم ہندسہ کی رو سے (۶۹)

$$\frac{\text{ا ج}}{\text{جب صہ}} = \frac{\text{ا ن}}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{2} + \text{عہ}\right)}$$



شکل (۳۷)

اور چونکہ ان ب ایک قائمہ زاویہ ہے اسلیے

ان = اب جم (π/۲ - صہ - عہ)

اس طرح اج = ان جب صہ قط عہ

= اب جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ

اسلئے پھسلن شروع ہوگی جوں ہی شخص اتنی بلندی پر چڑھ جائیگا جو پوری بلندی کا جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ گنا ہے۔

وہ شرط کہ شخص سیڑھی کے سرے پر بغیر پھسلے پہنچ جائے یہ ہے کہ جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ اکائی سے بڑا ہو یعنی

جب صہ جب (صہ + عہ) > جم [(صہ + عہ) - صہ]

> جب صہ جب (صہ + عہ) + جم صہ جم (صہ + عہ)

اس لیئے شرط کے پورا ہونے کے لیے جم صہ جم (صہ + عہ) کو منفی ہونا چاہیے یعنی صہ + عہ، ۹۰° سے بڑا ہونا چاہیئے۔ اس طرح سیڑھی اور انتصابی کا درمیانی زاویہ رگڑ کے زاویے سے چھوٹا ہونا چاہیئے۔ یہ شکل سے بھی ظاہر ہے کیونکہ جب شخص ب پر پہنچ جاتا ہے تو دو قوتیں یعنے ب پر کا تعامل اور شخص کا وزن دونوں ب میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے تیسری قوت بھی ب میں سے گذرنی چاہیئے یعنی ا پر کے تعامل کا خط عمل اب ہونا چاہیئے اور اگر سیڑھی عین یہاں پھسلتی ہے تو اب اور انتصابی کے درمیان زاویہ صہ ہونا چاہیئے۔

۴ ـــ اگر مثال ماسبق میں سیڑھی کے پھسلے بغیر شخص کسی نقطہ ج تک چڑھ جائے تو ا اور ب پر کے تعاملات کیا ہوں گے؟

یہاں یہ معلوم نہیں ہے کہ تعاملات عمادوں کے ساتھ کیا زاویے بناتے ہیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ زاویے رگڑ کے زاویے سے چھوٹے ہیں۔

فرض کرو کہ ہم ا پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل۱، ف۱ میں اور ب پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل۲، ف۲ میں تحلیل کرتے ہیں، یہ اجزائے ترکیبی اُفقی اور انتصابی ہیں حسب شکل۔ اب اس نظام پر جو شخص اور سیڑھی سے ترکیب یافتہ ہے عمل کرنے والی قوتیں پانچ ہیں:

ل، ف، ل، ف، اور و

انتصاباً تحلیل کرنے سے

و ـ ل ـ ف = ۰ ، .... (ا)

افقاً تحلیل کرنے سے

ف ـ ل = ۰ ، .... (ب)

ا کے گرد معیار لینے سے

و = اج جم ع ـ ف × اب جم ع ـ ل × اب جب ع = ۰ ،

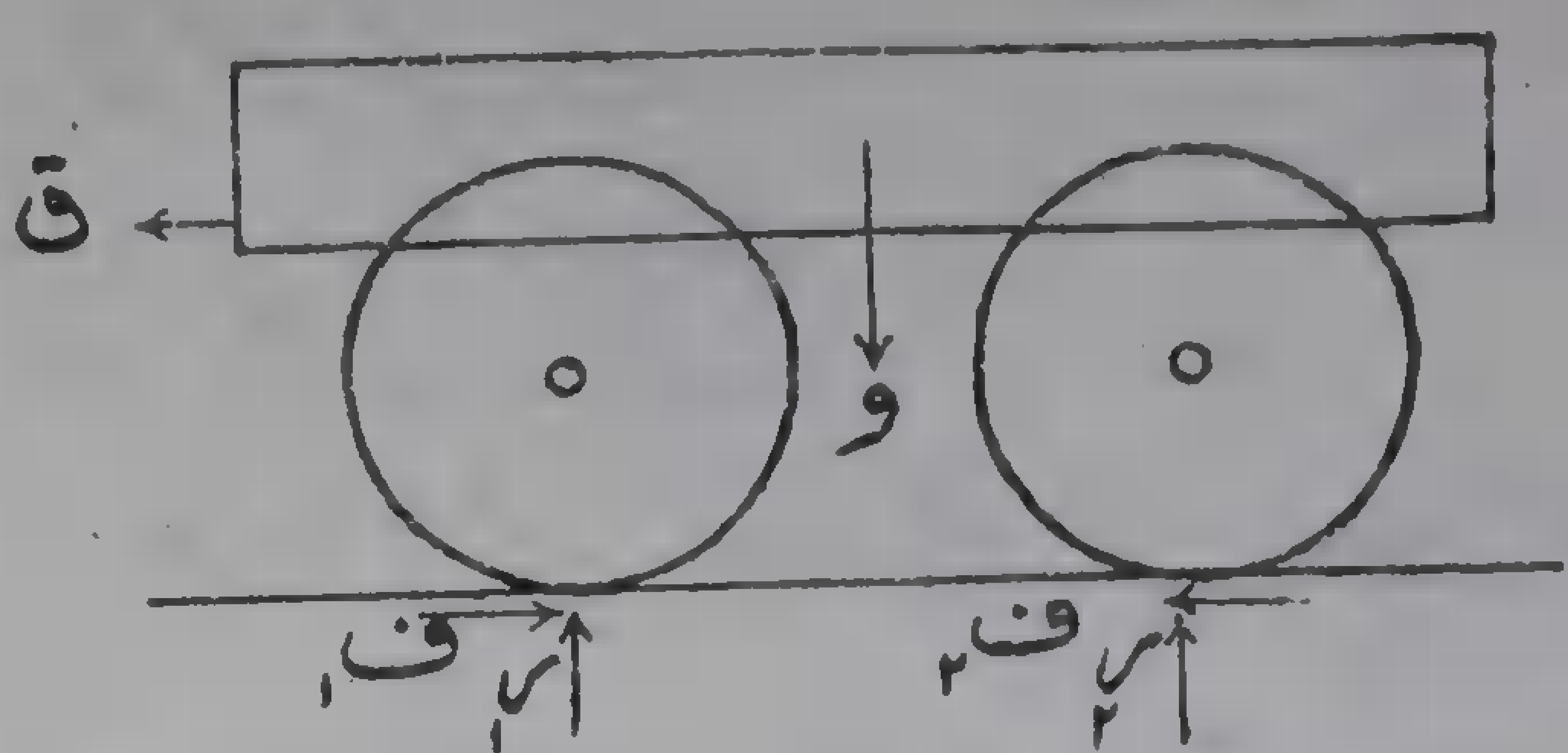
.... (ج)

(۷۰) چار مقداریں معلوم کرنی ہیں اور ابتک صرف تین مساواتیں حاصل ہوئی ہیں بلاشبہ قوتوں کو دوسری سمتوں میں تحلیل کر کے اور دوسرے نقطوں کے گرد معیار لیکر ہم دوسری مساواتیں حاصل کر سکتے ہیں لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتیں نئی نہیں ہیں بلکہ صرف وہی مساواتیں ہیں جن کا درست ہونا ان مساواتوں میں مضمر ہے جو اوپر حاصل کی جا چکی ہیں ۔ اس طرح قوتوں کو تحلیل کرنے اور معیاروں کو لینے سے ہم تین سے زیادہ غیر تابع مساواتیں حاصل نہیں کر سکتے اور یہ مساواتیں چار نامعلوم مقداروں کو متعین کرنے کے لیے کافی نہیں ہیں ۔

ہم نے یہاں ایک ایسا مسئلہ پیش کیا ہے جو ان طریقوں سے جو اس باب میں سمجھائے گئے ہیں حل نہیں ہو سکتا اور اس کے حل کے لیے قوتوں کے ان نظاموں پر غور کرنے کی ضرورت ہے جو اجسام کے مختلف ذرات کے درمیان پیدا ہوتے ہیں ۔ طالب علم کو اس حقیقت کا جان لینا ضروری ہے کہ ایسے مسئلے موجود ہوتے ہیں اگرچہ وہ ان کو فی الحال حل کر سکنے کے قابل نہ ہو ۔

۵ ـ قوت جو گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے ۔ اس مسئلہ کو سادہ سے سادہ بنانے کے لیے فرض کرو کہ گاڑی چار مساوی پہیوں پر بنائی گئی ہے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ا ہے اور ہر ایک نصف قطر ب کے محور کے گرد گردش کرتا ہے اور فرض کرو کہ پہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر ہر پہیہ کے لیے

وہی ہے۔ فرض کرو کہ قوت ق کو افقاً لگانے سے وہ گاڑی کو حرکت میں لانے کے لیے عین کافی ہوتی ہے۔



شکل (۳۸)

اول پوری گاڑی کے توازن پر غور کرو۔ کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتوں کو شمار کرنے کا سب سے زیادہ سہولت بخش طریقہ یہ ہے کہ پہلے ہم اپنے تصور میں ایک ایسا قالب لیں جو نظام پر عین ٹھیک بیٹھتا ہو اور پھر اس کی پوری سطح پر چلکر وہ قوتیں دیکھتے جائیں جو اِس کے مختلف نقطوں پر عمل کرتی ہیں۔ یہ قوتیں اور پورے نظام کا وزن ملکر قوتوں کا کُل نظام حاصل ہوگا۔ اِس طریقہ سے گاڑی پر عمل کرنے والی قوتوں کو معلوم کیا جائے تو وہ حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں:

(ا) اس کا وزن و،

(ب) افقی قوت عاملہ ق،

(ج) پہیوں اور زمین کے درمیان تعاملات۔ فرض کرو کہ ہر تعامل کو ایک انتصابی جزو ترکیبی ر اور ایک افقی جزو ترکیبی ف میں تحلیل کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ پہلے پہیہ اور زمین کے درمیان جو تعامل ہے اُس کے اجزائے ترکیبی کو $ف_۱$ $ر_۱$ سے تعبیر کیا گیا ہے، دوسرے پہیہ کے لیے متناظر مقداروں کو $ف_۲$، $ر_۲$ سے اور علیٰ ہذ القیاس۔

(۷۱) (پہیہ اور زمین کے درمیان عمل کرنے والی رگڑ کی قوت کے متعلق ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ حرکت وقوع پذیر ہونے کو ہے لیکن یہ حرکت زمین اور پہیہ کے درمیان

پھسلن کی قسم کی نہیں ہے اور اس لیے کسی پہیہ کے لیے ف کو جو نسبت گ کے ساتھ ہے وہ پہیہ اور زمین کے درمیان رگڑ کی قدر نہیں ہے۔)

وہ قوتیں جو اوپر شمار کی گئی ہیں گاڑی کو توازن میں رکھتی ہیں۔ اس لیے کسی سمت میں اِن کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے اور اسی طرح کسی خط کے گرد اِن کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔ افقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ق = ف_۱ + ف_۲ + ف_۳ + ف'_۴ \ldots\ldots (ا)$$

$$و = گ_۱ + گ_۲ + گ_۳ + گ'_۴ \ldots\ldots (ب)$$

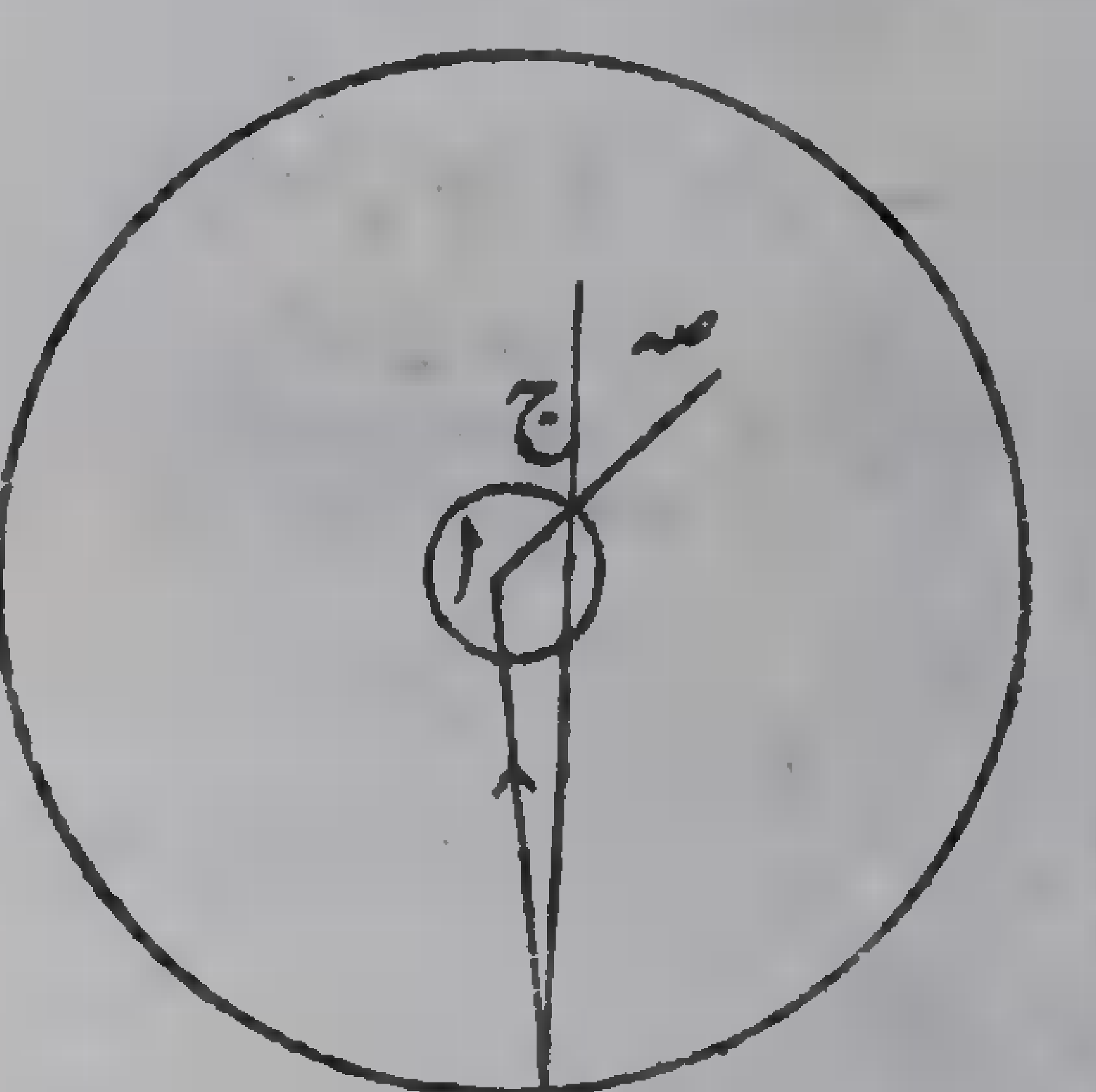
کسی خط کے گرد معیار لینے سے کچھ بھی فائدہ نہ ہوگا، چونکہ ق کا خط عمل معلوم نہیں ہے اس لیے ہم اس کا معیار معلوم نہیں کر سکتے۔

ثانیاً ایک واحد پہیہ کے توازن پر غور کرو۔ پہیہ زمین کو مس کرتا ہے اور محور کو بھی کسی نقطہ ج پر مس کرتا ہے۔ (ہم محور کو ایک ایسے نصف قطر کا دائرہ خیال کر سکتے ہیں جو پہیہ کے ناف کے اندرونی دائرہ کے نصف قطر سے بہت ہی خفیف فرق رکھتا ہے)۔ چنانچہ پہیہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اِس کا تعامل زمین کے ساتھ،

(ب) اِس کا تعامل محور کے ساتھ،

(ج) اِس کا وزن، جس کو ہم نظر انداز کریں گے کیونکہ وہ گاڑی کے وزن کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہے۔



شکل (۳۹)

اس تیسری قوت کو نظر انداز کرنے سے دو قوتیں رہ جاتی ہیں جو مساوی اور مخالف ہونی چاہئیں۔ چنانچہ ہر ایک کا خط عمل وہ خط ہے جو ب اور ج کو ملاتا ہے جو علی الترتیب زمین اور محور کے ساتھ پہیہ کے نقاط تماس ہیں۔ چونکہ ج پر پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہے اس لیے ج پر کا تعامل، ج پر کے عماد ا ج کے ساتھ زاویہ ص بنائے گا یعنے رگڑ کے زاویہ کے مساوی

اِس طرح زاویہ ب ج ا ' صہ کے مساوی ہے ۔

مثلث ا ج ب میں ا ج = ب ' ا ب = ا اور زاویہ ا ج ب = صہ - اِس لیے

$$\frac{\text{ا}}{\text{جب ا ب ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب صہ}}$$

لیکن چونکہ ب ج پر عمل کرنے والی قوت کے اجزاءِ ترکیبی ' ا ب کے متوازی اور اِس کے عمود وار ' کا_1 اور ف_1 ہیں اِس لیے

$$\text{مس ا ب ج} = \frac{\text{ف}_1}{\text{کا}_1}$$

اِس طرح

$$\frac{\text{ف}_1}{\text{کا}_1} = \text{مس ا ب ج}$$

$$= \frac{\text{جب ا ب ج}}{\sqrt{\text{۱} - \text{جب}^2\ \text{ا ب ج}}}$$

$$= \frac{\text{ب جب صہ}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2\ \text{جب}^2\ \text{صہ}}}$$

اب چونکہ صہ ' ا ' اور ب ہر پہیہ کے لیے وہی فرض کئے گئے ہیں اسلیے (۲۱)

$$\frac{\text{ب جب صہ}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2\ \text{جب}^2\ \text{صہ}}} = \frac{\text{ف}_1}{\text{کا}_1} = \frac{\text{ف}_2}{\text{کا}_2} = \frac{\text{ف}_3}{\text{کا}_3} = \frac{\text{ف}_4}{\text{کا}_4}$$

$$= \frac{\text{ف}_1 + \text{ف}_2 + \text{ف}_3 + \text{ف}_4}{\text{کا}_1 + \text{کا}_2 + \text{کا}_3 + \text{کا}_4}$$

$$= \frac{\text{ق}}{\text{و}}$$ ' مساواتوں (ا) اور (ب) کی رُو سے

اس لیے

$$\text{ق} = \frac{\text{و ب جب صہ}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2\ \text{جب}^2\ \text{صہ}}} \text{ ' .... (ج)}$$

اِسں مساوات سے مطلوبہ افقی قوت حاصل ہوگی ۔

ب کی قیمت جو محور کا نصف قطر ہے بالعموم ا کے مقابلہ میں جو پہیہ کا نصف قطر ہے چھوٹی ہوگی۔ اس لیے بغیر کسی قابل قدر خطا کے ہم $ا^2$ کے مقابلہ میں $ب^2 جب^2 صہ$ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور مساوات (ج) کے نسب نما میں صرف ا رکھ سکتے ہیں۔ چنانچہ یہ مساوات اب ہو جاتی ہے

$$ق = \frac{و ب جب صہ}{ا}$$

$\frac{ب}{ا}$ کو بہت چھوٹا کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ گاڑی کو بہت ہی آسانی سے چلایا جا سکتا ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر پہیہ اور محور کے درمیان اتنی بڑی رگڑ بھی ہو کہ رگڑ کی قدر کو لامتناہی سمجھا جا سکے تو بھی جب صہ = ۱ اور اس لیے

$$ق = \frac{و ب}{ا}$$

اور اس لئے گاڑی کھینچنے کے لیے جو قوت درکار ہوگی وہ پھر بھی اُس قوت کے مقابلہ میں چھوٹی ہوگی جو اِتنے ہی وزن کو کافی چکنی سطح پر کھینچنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے۔

اِس تحلیل میں ہم نے مان لیا ہے کہ پہیئے زمین کو صرف اپنے زیرترین نقطوں پر مس کرتے ہیں۔ یہ بڑی حد تک اُس صورت میں صحیح ہے جبکہ فولادی پہیے فولادی پٹریوں پر لڑھک رہے ہوں لیکن اِس کا اطلاق اُس مسئلہ پر نہیں ہوتا جبکہ معمولی بنڈی نرم سڑک پر حرکت کر رہی ہو کیونکہ پہیے کچھ حد تک سڑک میں دھنسے رہتے ہیں۔ فی الحقیقت اگر مندرجۂ بالا تحلیل میں وہ سب واقعات شامل کر لئے جائیں جو ایسی صورت میں پیش آتے ہیں تو یہ ظاہر ہے کہ گاڑی کو کھینچنے میں جو قوت مطلوب ہوگی وہ سڑک کی حالت پر منحصر ہوگی۔

مثالیں

۱۔ ۲۵۰ پونڈ کا ایک وزن ایک ہلکے ڈنڈے سے جو دو آدمیوں کے

کندھوں پر ہے لٹکا ہوا ہے اور یہ آدمی اسے افقی محل میں لیجا رہے ہیں۔اگر آدمی ایک دوسرے سے ۱۰ فٹ کے فاصلہ سے چلیں اور وزن قریب تر آدمی سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو معلوم کرو کہ ہر شخص کتنا وزن لیے جا رہا ہے۔

۲ — ایک وزن ایک ہلکے ڈنڈے سے جو دو ثابت سہاروں پر رکھا ہوا ہے لٹکایا گیا ہے۔سہاروں کے درمیان فاصلہ ۶ فٹ ہے۔وزن کو ایک سہارے سے ۶ انچ قریب تر حرکت دینے پر اس سہارے پر کا دباؤ بقدر ۱۰ پونڈ کے بڑھ جاتا ہے۔وزن کی مقدار کیا ہے؟

۳ — ایک ترازو کے دو پلڑوں میں سے ہر ایک کا وزن ۸ اونس ہے اور ہر ایک نصاب سے ۷ انچ کے فاصلہ پر ڈنڈی سے لٹکا ہوا ہے۔ایک بے ایمان تاجر ایک پلڑے کو نصاب سے نصف انچ قریب تر کرتا ہے اور اس میں کچھ وزن کا اضافہ کر دیتا ہے تاکہ دونوں پلڑے متوازن ہو جائیں۔یہ اضافہ شدہ وزن معلوم کرو اور بتاؤ کہ اس کی اس بے ایمانی سے اس کو کتنا زیادہ فائدہ ہوگا۔ (۷۳)

۴ — ایک ترازو کی ڈنڈی کے ایک سرے سے ۲۰ اونس کا ایک وزن لٹکایا گیا ہے۔ڈنڈی کے دوسرے سرے پر نصاب سے مساوی فاصلہ پر ایک ڈوری باندھ دی گئی ہے جو افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔اس ڈوری کو کس قوت سے کھینچنا چاہئیے کہ ترازو کی ڈنڈی افقی محل میں رہے۔

۵ — ۸ فٹ لمبے ڈنڈے کو ایک جسم کے ہٹانے میں استعمال کرنا ہے، یہ معلوم ہے کہ اس جسم پر ۵۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت انتصاباً اوپر وار لگانے سے اسکو ہٹایا جا سکتا ہے۔ڈنڈے کے سرے سے کس قدر قریب نصاب کو رکھنا چاہئیے کہ ۱۴۰ پونڈ وزن کا ایک شخص اس کے دوسرے سرے پر کھڑے رہ کر مطلوبہ قوت لگا سکے۔

۶ — ناقابل قدر وزن کا ایک میز متعدد پایوں پر قائم ہے۔ایک وزنی ذرہ میز پر رکھا گیا ہے۔ثابت کرو کہ میز الٹ جائیگا اگر ذرہ میں سے گذرنے والا انتصابی میز کے نیچے کے فرش سے اس کثیر الاضلاع کی بیرونی جانب جو فرش پر پایوں کے نقاط تماس کو ملانے سے بنتا ہے ایک نقطہ پر ملے۔

۷۔ ناقابل قدر وزن کا ایک میز تین پایوں پر قائم ہے جو ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ ایک وزنی ذرہ کو میز پر ایسے محل میں رکھا گیا ہے کہ میز الٹنے نہیں پاتا۔ وزن کا تناسب معلوم کرو جو ہر پایہ پر ہے۔

۸۔ ایک کارڈ افقی محل میں تین مساوی نا امتداد پذیر ڈوریوں کے ذریعہ جو کارڈ کے تین نقطوں ا، ب، ج سے بندھی ہیں اور نیز کارڈ کے اوپر ایک نقطہ ن سے بندھی ہیں لٹکا ہوا ہے اور ا، ب، ج ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ کارڈ کے کسی نقطہ ق پر جو مثلث کے اندر ہے ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۹۔ ایک کارڈ چار مساوی نا امتداد پذیر ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے جو کارڈ کے اندر ایک مربع کے چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرتی ہیں اور چار نقطوں اَ، بَ، جَ، دَ سے بندھی ہیں جو نقطوں ا، ب، ج، د کے انتصاباً اوپر مساوی بلندیوں ف پر ہیں۔ کارڈ پر مربع ا ب ج د کے اندر کسی نقطہ ن پر ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ، ڈوریوں کے اندرونی زوروں (Stresses) پر غور کئے بغیر متعین نہیں ہو سکتے۔

۱۰۔ اگر پچھلی مثال میں ڈوریوں کے اندرونی زور ڈوریوں کو بہت خفیف طور پر وسیع کریں تاکہ کلیہ ہک کی پابندی ہو تو ثابت کرو کہ تناؤ معلوم کئے جا سکتے ہیں اور انہیں معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مستطیلی تختہ، نصف قطر ا کے ایک کھردرے دائری کندے پر جو افقاً ثابت ہے لڑھکتا ہے۔ دو شخص تختہ کے وسطی نقطہ سے فاصلوں ب، ج پر کھڑے ہیں، ان کے وزن ایسے ہیں کہ تختہ عین افقاً متوازن ہے اور اس کا وسطی نقطہ کندے پر ٹکا ہوا ہے۔ پہلا شخص کندے کے مرکز کی جانب فاصلہ د تک حرکت کرتا ہے۔ کس زاوئے میں سے تختہ گردش کرے گا؟ شخص کتنے آگے بڑھ سکتا ہے قبل اس کے کہ تختہ کندے سے بالکل پھسل پڑے۔

۱۲۔ نصف قطر ا کے دو پہیئے، نصف قطر ب کے ایک محور سے مربوط کئے گئے ہیں اور وہ افقی پٹڑیوں پر جا رہے ہیں۔ محور کے گرد ایک ڈوری لپٹی گئی ہے

اور اِس کا سرا محور سے نکل کر افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے ۔ اگر اِس ڈوری کو ایک شخص کھینچے تو ثابت کرو کہ پہیے شخص کی جانب حرکت کریں گے یا اُس سے پرے ہٹینگے ہو جب اِس کے کہ جم طہ، ب/ا سے بڑا یا چھوٹا ہو ۔ کیا ہو گا جبکہ جم طہ = ب/ا ؟

(۴۷) ۱۳ ۔ اگر ایک گاڑی کے پہیوں اور محوروں کا وزن و ہو اور اگر اِسے وَ کے مقابلہ میں جو گاڑی کا کل وزن ہے نظر انداز نہ کیا جا سکے تو ثابت کرو کہ مثال ۵ صفحہ ۱۰۶ کی مساوات (ج) حسب ذیل ہونی چاہیے

$$ق = \frac{(وَ - و)\ ب\ جب\ صہ}{\sqrt{ا^2 - ب^2\ جب^2\ صہ}}$$

۱۴ ۔ ایک انجن جس کا وزن ۴۳ ۱۲ پونڈ ہے ایک بوگی پر جس کے پہیے اور محور ۴ ٹن وزن کے ہیں اور چلاؤ پہیوں کے دو جوڑوں پر جن کے پہیے اور محور ۱۰ ٹن وزن کے ہیں ساکن ہے ۔ بوگی کے محوروں پر ۴۰ ٹن کا وزن اور چلاؤ پہیوں کے محوروں پر ۸۰ ٹن کا وزن بار کیا گیا ہے ۔ پہیوں کے نصف قطر علی الترتیب ۲۰ اَ اور ۷ اَ ہیں ۔ ہر محور جہاں وہ محور کے صندوق میں سے گذرتا ہے ۱/۲ ۲ نصف قطر کا ہے اور رگڑ کی قدر ۱/۵ ہے ۔ وہ افقی قوت معلوم کرو جو انجن کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے ۔

۱۵ ۔ مثال ۱۴ میں پٹڑیوں پر چکنائی لگائی گئی ہے تاکہ ان میں اور پہیوں کے درمیان رگڑ کی قدر ۱/۱۰۰ سے بھی کم ہو ۔ ثابت کرو کہ انجن کو، چکنے پٹڑیوں پر پہیوں کو گھسیٹے بغیر چلایا نہیں جا سکتا اور اُن حرکی اعمال کی تشریح کرو جن سے اِس صورت میں انجن کو حرکت میں لایا جا سکتا ہے ۔

ڈوریاں

۵۳ ۔ ڈوریاں، رسیاں اور زنجیریں اکثر اجسام کے اُن نظامات کا جزو ہوتی ہیں جو سکونیاتی مسائل سے تعلق رکھتے ہیں اور اِس لیے ڈوری (یا رسی یا زنجیر) کے توازن پر غور کرنا ضروری ہے ۔ پہلا مسئلہ جس پر ہم غور کریں گے

ایک ایسی ڈوری کا ہے جو ایک سطح پر مثلاً جرخی کے پہیہ پر تنی ہوئی ہو، یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ ڈوری کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یہ کہ ڈوری اور سطح کے درمیان تماس تمام نقطوں پر برابر کھردرا ہے۔ نیز یہ بھی فرض کیا جائے گا کہ ڈوری پوری کی پوری ایک مستوی میں ہے۔

فرض کرو کہ ڈوری کے دو متصلہ نقطے ف، ق باہم اس قدر قریب ہیں کہ ڈوری کے حصہ ف ق کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔

اِس ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہوں گی:

(ا) $ت_ف$، نقطہ ف پر کا تناؤ جو ڈوری کے نقطہ ف پر کے مماس کی سمت میں عمل کرتا ہے،

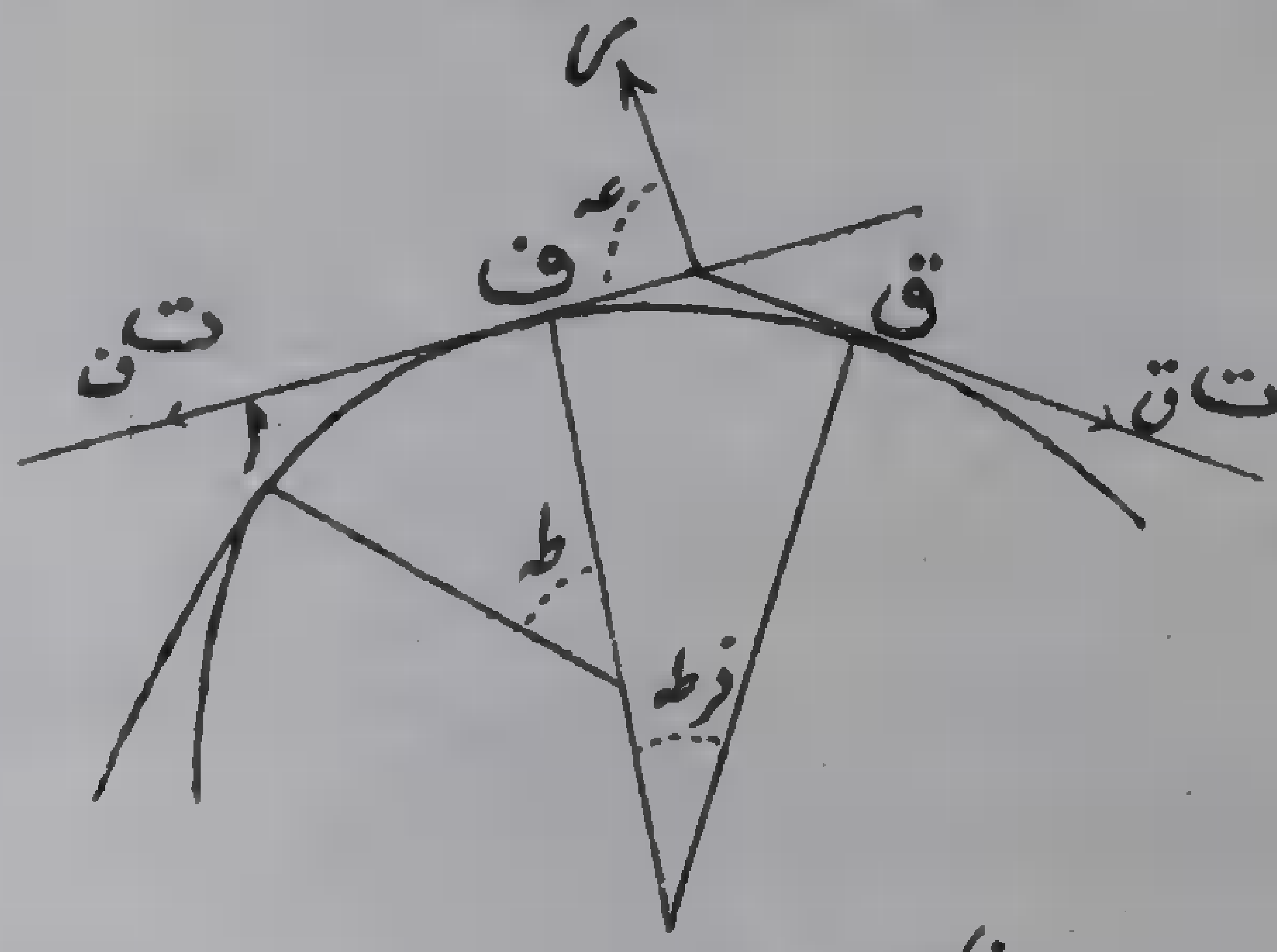
(ب) $ت_ق$، نقطہ ق پر کا تناؤ جو ڈوری کے نقطہ ق پر کے مماس کی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ج) تعامل سطح کے ساتھ۔

لامی کے مسئلہ کی رُو سے ہر قوت اُس زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے جو باقی دو قوتوں کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ا، سطح کا وہ نقطہ ہے جس پر ڈوری سطح کو چھوڑتی ہے۔ (۰۵)

فرض کرو کہ سطح کے عماد نقاط ا، ف، ق پر کھینچے گئے ہیں اور فرض کرو کہ ف پر کا عماد، ا پر کے عماد سے زاویہ ط بناتا ہے۔ اگر نقاط ا، ف، ق اسی ترتیب میں ہوں (دیکھو شکل ۴۰) تو ق پر کا عماد، ف پر کے عماد سے



شکل (۴۰)

ایک ایسا زاویہ بنائے گا جو طہ سے خفیف طور پر بڑا ہوگا، فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ + فرطہ ہے تو فرطہ وہ چھوٹا زاویہ ہے جو ف اور ق پر کے عمادوں کے درمیان ہے۔

اِس ترقیم کی رُو سے تناؤں ت ان اور ت اق کے درمیان زاویہ π - فرطہ ہے۔ فرض کرو کہ تعامل س اور تناؤ ت ان کے درمیان زاویہ عہ ہے تو تناؤ ت اق اور س کے درمیان زاویہ π - عہ + فرطہ ہوگا۔ اِس لیے

$$\frac{\text{س}}{\text{جب}(\pi - \text{فرطہ})} = \frac{\text{ت ان}}{\text{جب}(\pi - \text{عہ} + \text{فرطہ})} = \frac{\text{ت اق}}{\text{جب عہ}}$$

چونکہ $\text{جب}(\pi - \text{عہ} + \text{فرطہ}) = \text{جب}(\text{عہ} - \text{فرطہ})$ اس لیے

$$\frac{\text{ت اق}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{ت اف}}{\text{جب}(\text{عہ} - \text{فرطہ})}$$

اور جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلے سے ہر کسر

$$= \frac{\text{ت اق} - \text{ت ان}}{\text{جب عہ} - \text{جب}(\text{عہ} - \text{فرطہ})}$$

اب ت اق - ت ان، ت کا اضافہ ہے جبکہ طہ، طہ سے طہ + فرطہ تک تبدیل ہوتا ہے اور یہ تفرقی احصاء کی ترقیم میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}\,\text{فرطہ}$$

نیز نسب نما جب عہ - جب (عہ - فرطہ)، جب عہ کا اضافہ ہے جبکہ (٧٦)
عہ، عہ - فرطہ سے عہ تک بدلتا ہے اور یہ بھی اسی طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فر}(\text{جب عہ})}{\text{فرعہ}}\,\text{فرطہ} \quad \text{یا} \quad \text{جم عہ فرطہ}$$

اِس لئے ابتدائی کسر

$$= \frac{\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}\,\text{فرطہ}}{\text{جم عہ فرطہ}} = \text{قطعہ}\,\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}$$

اس لیے $$\frac{\text{ت}_{\text{ق}}}{\text{جب عہ}} = \text{قطعہ}\ \frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}$$

یا $$\text{ت}_{\text{ق}} = \text{مس عہ}\ \frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

جب انتہا میں ذرہ ف ق کو لاانتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو $\text{ت}_{\text{ق}}$ اور $\text{ت}_{\text{ف}}$ ناقابل امتیاز ہو جاتے ہیں۔ فرض کرو ان میں سے کسی ایک کو ت سے تعبیر کیا گیا ہے اور اس لیے ت صرف ایک نقطہ پر کا تناؤ ہے جس کا عماد، ا پر کے عماد کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ اگر ڈوری سمت ا ف ق میں عین پھسلنے کو ہو تو نقطہ ق یا ف کسی ایک پر کے عماد اور تعامل ر کے درمیان زاویہ صہ بنے گا جو رگڑ کا زاویہ ہے۔ اس لیے حاصل ہونا چاہیے

$$\text{عہ} = \frac{\pi}{2} - \text{صہ}$$

اس لیے مس عہ = مم صہ اور مساوات (۱۲) ہو جاتی ہے

$$\text{ت} = \text{مم صہ}\ \frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}\text{،} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

۵۴ — اگر سطح اور ڈوری کے درمیان تماس کامل چکنا ہو تو صہ = ۰ اور اس لیے $\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}} = ۰$۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ت مستقل ہے یعنی ڈوری کے تمام نقطوں پر تناؤ ایک ہی ہے۔ اس لیے کسی ڈوری کا تناؤ نہیں بدلتا جبکہ اُسے ایک چکنی سطح پر سے گذارا جاتا ہے، یہ وہی نتیجہ ہے جو دفعہ ۳۶ میں حاصل ہو چکا ہے۔

۵۵ — بالعموم تماس عملاً کامل چکنا نہیں ہوتا، فرض کرو کہ رگڑ کی قدر مہ ہے، اس لیے

مہ = مس صہ اور مساوات (۱۳) لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\text{فر ت}}{\text{فر طہ}} = \text{مہ ت}$$

اور تکمیل کرنے سے $\frac{\text{فر ت}}{\text{ت}} = \text{فر (مہ طہ)}$

فر (لوک ت) = فر (مہ طہ)

یا لوک ت = مہ طہ + مستقل

فرض کرو کہ ا پر کا تناؤ ت. ہے تو طہ = ۰ رکھنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ یہ مستقل لوک ت. کے مساوی ہونا چاہیئے، اس لیے

لوک ت - لوک ت. = مہ طہ

یا $\text{ت} = \text{ت.}\ \text{و}^{\text{مہ طہ}}$

اگر ڈوری سطح کو مکر رکسی نقطہ ب پر چھوڑے اور اس نقطہ پر کا عماد، ا پر کے عماد کے ساتھ زاویہ سہ بنائے تو ب پر کے تناؤ کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \text{ت.}\ \text{و}^{\text{مہ سہ}}$$

اس لیے تناؤ، ا سے ب تک سطح پر گذرنے میں $\text{و}^{\text{مہ سہ}}$ سے ضرب کھا جاتا ہے۔

اگر ڈوری (یا رسی) ایک ستون یا مستول کے گرد اگرد لپیٹی جائے تو ہر مکمل پھیر کے لیے تناؤ نسبت $\text{و}^{\text{۲ مہ } \pi}$ میں بڑھ جاتا ہے۔ بلوط پر سن کی رسی کے لیے رگڑ کی قدر مورِن (Morin) کی تحقیق کی بموجب مہ = ۵۳ء۰ ہے۔ اس لیے ۲ مہ π = ۳ء۳۴ اور $\text{و}^{\text{۲ مہ } \pi}$ = ۱ء۲۸

اِس لیے سن کی رسی کا تناؤ جو بلوط کے ستون کے گرد لپیٹی گئی ہو، ہر مکمل پھیر کے لیے تقریباً اٹھائیس گنا بڑھ جاتا ہے۔

مثالیں

ا۔ ایک وزن کو ایک رسی سے لٹکایا گیا ہے جو ایک افقی شہتیر کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور جو شہتیر سے افقاً نکلتی ہے۔ اِس کا سِرا ایک مزدور کے قابو میں ہے

اگر رسی شہتیر کے گرد $\frac{1}{4}$ ۱ مکمل پھیروں میں لپٹی گئی ہو تو مزدور کو کتنی قوت لگانی چاہئے کہ

(ا) وزن پھسلنے نہ پائے،

(ب) وزن اٹھے، (مہ = $\frac{1}{4}$ فرض کرو)۔

(۷۸) ۲ ۔ $\frac{1}{2}$ ۲ پونڈ کا ایک وزن ایک کھردرے میز پر قائم ہے۔ وزن کے قاعدہ سے ایک رسی باندھ دی گئی ہے جو میز کے کنارے پر سے لٹکتی ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ایک دوسرا وزن باندھا گیا ہے جو آزادانہ لٹکتا ہے۔ اگر میز اور وزن کے درمیان اور میز اور ڈوری کے درمیان رگڑ کی قدر علی الترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہو تو معلوم کرو کہ لٹکتا وزن کتنا بھاری ہونا چاہئے کہ دوسرا وزن عین حرکت کر سکے۔

۳ ۔ ۲۵۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک جہاز کے پیٹے سے اٹھانا ہے۔ ایک رسی جو وزن سے بندھی ہے ایک بھاپ ڈنڈا چرخ کے گرد $\frac{1}{4}$ ۳ پھیروں میں لپٹی ہوئی ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک ملاح پکڑے ہوئے ہے۔ اس کو رسی کا سرا کتنی قوت سے کھینچنا چاہئے کہ وزن اٹھ سکے جبکہ ڈنڈا چرخ حرکت میں ہو۔ (مہ = $\frac{1}{8}$)۔

۴ ۔ مثال ماسبق میں رسی پر کتنی قوت لگانی چاہئے اگر ڈنڈا چرخ ساکن ہو۔

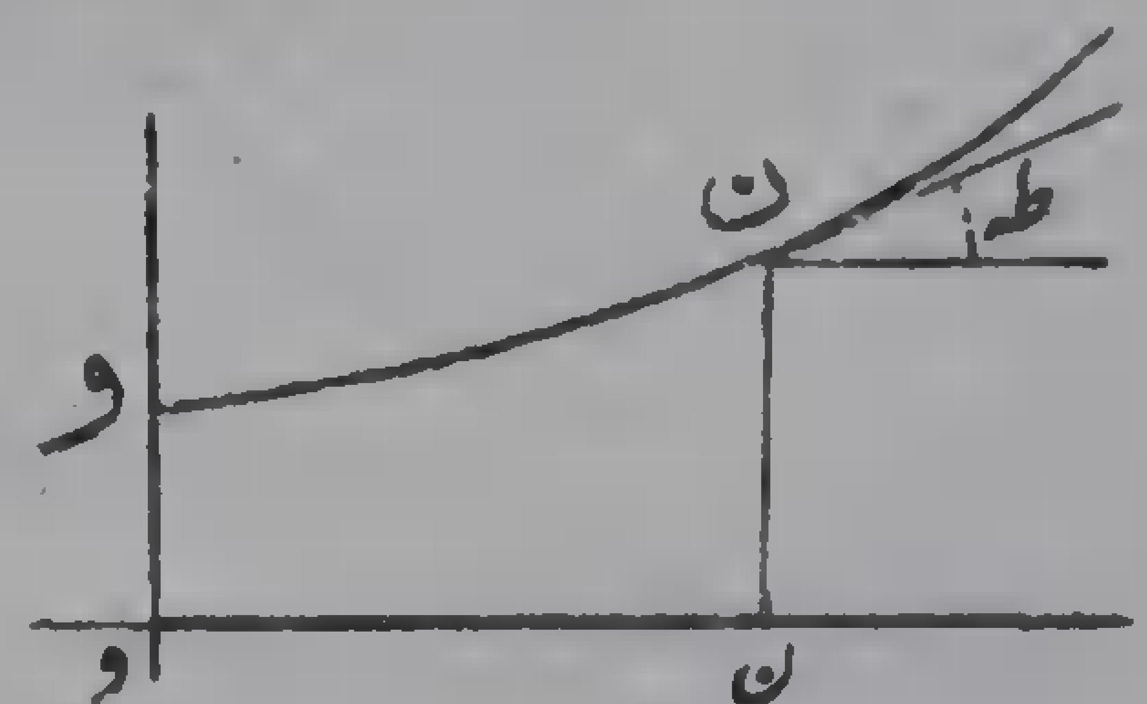
۵ ۔ یہ معلوم ہوا کہ دو آدمی ایک وزن کو جو ایک رسی سے بندھا ہے سہار سکتے ہیں جبکہ رسی ایک ستون کے گرد تین پھیروں میں لپٹی ہوئی ہو۔ اور صرف ایک آدمی سہار سکتا ہے جبکہ رسی صرف ساڑھے تین پھیروں میں لپٹی ہوئی ہو۔ اگر ہر آدمی ۲۲۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچ سکتا ہے تو سہارے ہوئے وزن کی مقدار معلوم کرو۔

۶ ۔ رسا کھینچنے کے ایک مقابلہ میں (Tug of war) یہ دیکھا گیا کہ رسی عین نازک موقع پر ایک ستون سے رگڑ کھاتی ہے اور اسلئے رسی کے دو حصے ایک دوسرے سے $^{\circ}$ کا زاویہ بناتے ہیں۔ اگر رسی اور ستون کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{6}$ ہو تو ثابت کرو کہ اس واقعہ سے جیتنے والے گروہ پر اپنی کل کھینچ کا ۰.۲۹ گنا زائد بار پڑتا ہے۔

جھولا پُل

۵۶ - جھولا پُل سے ایک دلچسپ سوال ہمارے سامنے پیش ہوتا ہے۔ اِس میں پُل (جسے افقی فرض کیا گیا ہے) کے وزن کو ایک موٹا تار انتصابی زنجیروں کے ذریعہ جو پُل کو تار سے مربوط کرتی ہیں سہارتا ہے۔

فرض کرو کہ زنجیروں اور تار کے اوزان نظر انداز کئے گئے ہیں اور پُل کا وزن اِس کے طول پر یکساں طور پر منقسم ہے۔



شکل (۴۱)

فرض کرو کہ تار کا زیر ترین نقطہ و ہے اور کوئی اور نقطہ ن ہے۔ فرض کرو کہ و، ن کے انتصاباً نیچے پُل کے نقطے و، ن ہیں۔ فرض کرو کہ و ن = لا۔ فرض کرو کہ ن پر کا تناؤ ت ہے اور و پر کا ھ۔ فرض کرو کہ ن پر تار کی سمت، افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔

تار کے ٹکڑے و ن پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں: (۹۷)

(ا) و پر کا تناؤ ھ جو افقاً عمل کرتا ہے،

(ب) ن پر کا تناؤ ت جو افق کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ج) انتصابی زنجیروں کے تناؤ جو سب کے سب انتصاباً عمل کرتے ہیں۔

قوتوں کو افقاً تحلیل کرنے سے

ھ - ت جم طہ = ۰ ، .... (۱۵)

انتصاباً تحلیل کرنے سے

ت جب طہ - س = ۰ .

جہاں س اُن تمام زنجیروں کے تناؤں کا مجموعہ ہے جو و اور ن کے درمیان

تار سے لٹک رہی ہیں۔ یہ تنا ڈپل کے حصہ و ن کو سہارتے ہیں اور اگر پل کا وزن فی اکائی طول و ہو تو و ن کا وزن و لا ہوگا۔ اس لیے س = و لا اور اس لیے

ت جب طہ = و لا، .... (۱۶)

اِس مساوات اور مساوات (۱۵)

ت جم طہ = ھ، .... (۱۷)

سے مطلوبہ معلومات حاصل ہوں گی۔

وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جو تار کی ہونی چاہیئے تا کہ پل افقاً لٹک سکے ہمیں طہ اور لا کے درمیان ایک رشتہ حاصل کرنا ہوگا۔ چنانچہ مساوالوں (۱۶) اور (۱۵) سے ہم ت کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{و}}{\text{ھ}}\,\text{لا}$$

اگر پل کے اوپر تار کا ارتفاع ما ہو تو تار کے کسی نقطہ ن کے کارٹیزی محدد لا، ما سمجھے جا سکتے ہیں اور ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس ن کے محدد لا، ما رشتہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{و}}{\text{ھ}}\,\text{لا}$$

کے ذریعہ مربوط ہیں۔ تکمل کرنے سے

$$\text{ما} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}}{\text{ھ}}\,\text{لا}^2 + \text{ج}$$

جہاں ج تکمل کا مستقل ہے۔

(۸۰) مساوات بالا تار کی کارٹیزی مساوات ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ وہ وتر خاص $\frac{2\,\text{ھ}}{\text{و}}$ کے ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لیے تار کو

مکافی کی شکل میں لٹکنا چاہیئے ۔ افقی تناؤ بڑا ہو تو مکافی کا وتر خاص بھی بڑا ہوگا اور اس لیے تار کا منحنی زیادہ چوڑا ہوگا ۔ کامل طور پر مستقیم تار بلاشبہ ناممکنات سے ہے کہ اس صورت میں لامتناہی تناؤ کی ضرورت ہے ۔

۵۷ ــ تار کے کسی نقطہ پر تناؤ معلوم کرنے کے لیے ہم مساواتوں (۱۶) اور (۱۷) کا مربع لیتے ہیں اور متناظر طرفین کو جمع کرتے ہیں ۔ اس طرح

$$ت^۲ = ھ^۲ + و^۲ لا^۲$$

اس مساوات سے اُس نقطہ پر کا تناؤ حاصل ہوگا جس کا فاصلہ مرکز سے لا ہے ۔ اگر پُل کا طول ۲ ا ہے تو اِس کے کسی ایک سرے پر تناؤ

$$\sqrt{ھ^۲ + و^۲ ا^۲}$$

ہونا چاہیئے ۔

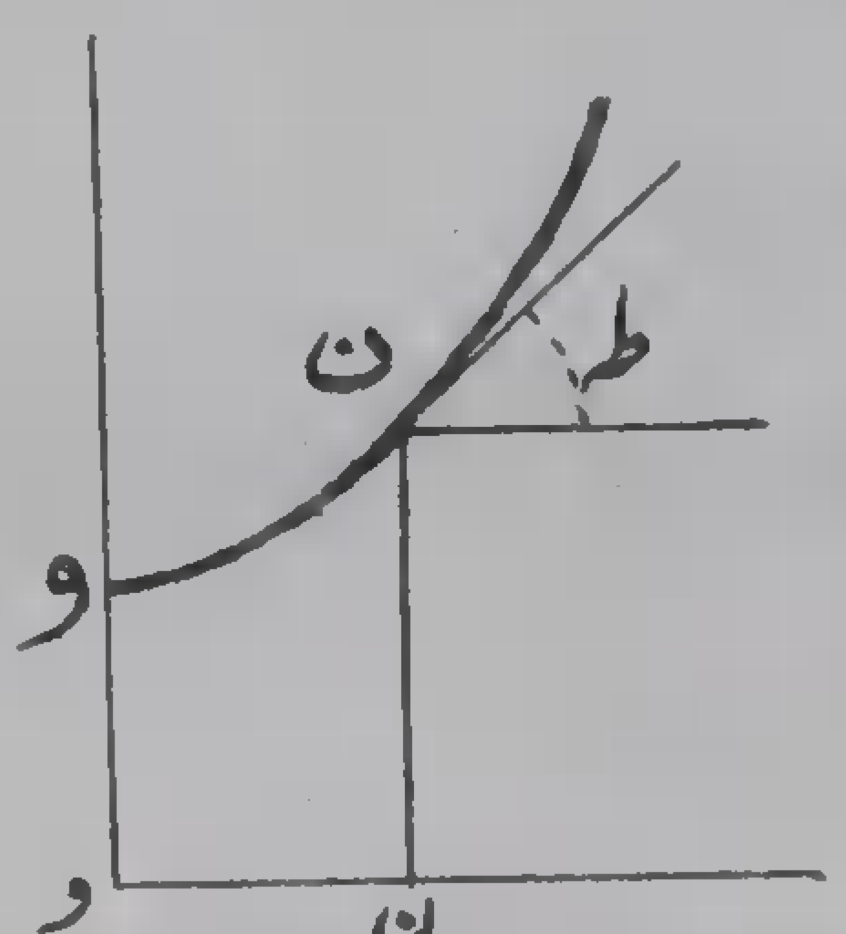
زنجیرہ

۵۸ ــ جھولا پُل کے مسئلہ میں ہم نے تار کے وزن کو نظر انداز کیا ہے ۔ ایک دوسرا مسئلہ پیدا ہوتا ہے جبکہ تار پر سوائے اِس کے ذاتی وزن کے کوئی اور بیرونی قوتیں عمل نہ کریں ۔ یہ مسئلہ صرف اُس ڈوری کا مسئلہ ہے جسکے دو سرے دو ثابت نقطوں سے بندھے ہوں اور وہ ان نقطوں کے درمیان آزادانہ لٹک رہی ہو ۔

حسب سابق فرض کرو کہ زیر ترین نقطہ و ہے اور کوئی دوسرا نقطہ ن ہے ۔ ڈوری کے حصہ و ن پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں :

(ا) و پر کا تناؤ ھ جو افقاً عمل کرتا ہے،

(ب) ن پر کا تناؤ ت جو افق کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے،



شکل (۴۲)

(ج) و ن کا وزن ۔ اگر ہم فرض کریں کہ ڈوری کا وزن فی اکائی طول و ہے اور فاصلہ و ن کو س سے تعبیر کریں تو یہ وزن و س ہے جو انتصاباً عمل کرتا ہے۔ (۸۱)

افقاً تحلیل کرنے سے

ھ ۔ ت جم طہ = ۰، .... (۱۸)

انتصاباً تحلیل کرنے سے

ت جب طہ ۔ و س = ۰، .... (۱۹)

منحنی کی وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جس میں ڈوری لٹکتی ہے ہمیں طہ اور س میں ربط معلوم کرنا چاہئے۔ ت کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ھ مس طہ = و س

یا اگر ہم ھ/و کی بجائے ایک واحد مستقل م رکھیں تو

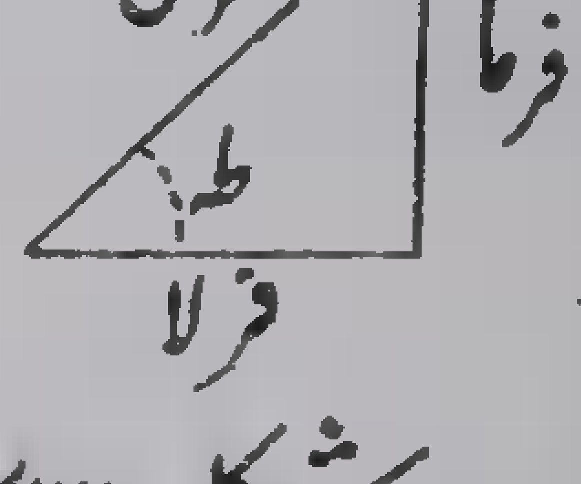
س = م مس طہ، .... (۲۰)

یہ منحنی کی مساوات کی ایک شکل ہے جس میں س اور طہ محددوں کے طور پر لئے گئے ہیں ۔ اس شکل میں مساوات کو منحنی کی **ذاتی مساوات** کہتے ہیں ۔ لیکن اس مساوات کو کارٹیزی شکل میں اخذ کرنے کی ضرورت ہے ۔

۵۹ ۔ اگر شکل (۴۲) میں نقطہ و کو مبداء اور محوروں کو افقی اور انتصابی لیا جائے تو حسب ذیل ربط فوراً حاصل ہوتا ہے

فرلا : فرما : فرس = جم طہ : جب طہ : ۱، .... (۲۱)

کیونکہ فرلا اور فرما، ڈوری کے طول کے چھوٹے عنصر فرس کے افقی اور انتصابی ظِل ہیں ۔ اول ہم رشتوں (۲۱) کا استعمال مساوات (۲۰) کے متغیروں کو س اور طہ سے س اور ما میں بدلنے کے لیے کریں گے ۔



شکل (۴۳)

چنانچہ

$$\text{م}^2 = \text{س}^2\,\text{م}^2\,\text{طہ} = \text{س}^2\,\text{تم}^2\,\text{طہ} - \text{س}^2 = \text{س}^2\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}\right)^2 - \text{س}^2$$

اس لیے

$$\text{س}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{م}^2}$$

پس

$$\text{فرما} = \frac{\text{س فرس}}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{م}^2}}$$

اور اس کو تکمل کرنے سے

$$\text{ما} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{م}^2} + \text{مستقل} \qquad \ldots\ldots\ldots (۲۲)$$

ہم تکمل کے مستقل کو متعین کر سکتے ہیں اگر اس کا فیصلہ ہو جائے کہ مبدا، کو کہاں لینا چاہئے۔ ہم نے ابتک نقطہ و کو مقرر نہیں کیا ہے۔
(۸۲) چونکہ س سے منحنی کی وہ قوس تعبیر ہوتی ہے جو و سے پیمائش کی گئی ہے اس لیے نقطہ و پر س = ۰ اور اس لیے و کا ما محدد (مساوات (۲۲) میں س = ۰ رکھنے سے) حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{م} + \text{مستقل}$$

فرض کرو کہ ہم و و کو م کے مساوی بناتے ہیں، اس لیے و پر ما = م۔ اب تکمل کا نامعلوم مستقل صفر ہونا چاہئے۔ اس لیے مساوات (۲۲) ہو گی

$$\text{ما}^2 = \text{س}^2 + \text{م}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (۲۳)$$

آخر میں ہمیں متغیروں کو ما اور س سے ما اور لا میں تبدیل کرنا ہے۔ وہ رشتہ جس کی مدد سے ہم ایسا کر سکتے ہیں رشتوں (۲۱) سے طہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے اور حسب ذیل ہے

$$(\text{فرس})^2 = (\text{فرما})^2 + (\text{فرلا})^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (۲۴)$$

چونکہ محصلہ مساوات

$$\text{س} = \sqrt{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}$$

ہے اس لیے $\quad \text{فرس} = \dfrac{\text{ما فرما}}{\sqrt{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}}$

اِس مساوات اور مساوات (۲۴) سے فرس کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ما}^{2}(\text{فرما})^{2}}{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}} = (\text{فرما})^{2} + (\text{فرلا})^{2}$$

اس سے $\quad (\text{فرلا})^{2} = (\text{فرما})^{2}\left[\dfrac{\text{ما}^{2}}{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}} - ۱\right]$

$$= \frac{\text{م}^{2}}{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}(\text{فرما})^{2}$$

اس لیے $\quad \text{فرلا} = \dfrac{\text{م فرما}}{\sqrt{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}}$ ، .... (۲۵)

اس کو تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{ما}}{\text{م}} = \text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}} \text{ ، } \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۶)$$

جہاں $\quad \text{جمز}\,\dfrac{\text{لا}}{\text{م}} = \dfrac{۱}{۲}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}}\right)$

طالب علم اگر زائدی جیب التمام (جمز) تفاعل سے واقف نہیں ہے تو وہ مساوات (۲۶) کی تصدیق اس طور پر کر سکتا ہے کہ اس کو تفرق کر کے دیکھے کہ آیا مساوات (۲۵) حاصل ہوتی ہے۔

مساوات (۲۶) اُس منحنی کی کارٹیزی مساوات ہے جو ڈوری سے (۸۳)
بنتا ہے۔ اِس منحنی کو زنجیرہ کہتے ہیں۔

مساوات (۲۳) سے س کی قیمت شکل

$$س^{2} = ما^{2} - م^{2}$$

$$= م^{2}\left(جمز^{2}\frac{لا}{م} - ۱\right)$$

$$= م^{2}\,جبز^{2}\frac{لا}{م}$$

میں حاصل ہوتی ہے۔ اِس لیے

$$\frac{س}{م} = جبز\frac{لا}{م}$$

جہاں $جبز\frac{لا}{م} = \frac{1}{2}\left(قو^{\frac{لا}{م}} - قو^{-\frac{لا}{م}}\right)$

۶۰ — قوت نماؤں $قو^{\frac{لا}{م}}$، $قو^{-\frac{لا}{م}}$ کو پھیلانے سے $جمز\frac{لا}{م}$ شکل

$$جمز\frac{لا}{م} = ۱ + \frac{1}{2}\left(\frac{لا}{م}\right)^{2} + \frac{1}{24}\left(\frac{لا}{م}\right)^{4} + \cdots\cdots$$

میں حاصل ہوتا ہے۔

جب تک لا چھوٹا ہے ہم اِس سلسلہ کی تمام رقموں کو سوائے پہلی اور دوسری رقم کے نظر انداز کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ سے حاصل شدہ قیمت کو استعمال کرنے سے مساوات (۲۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

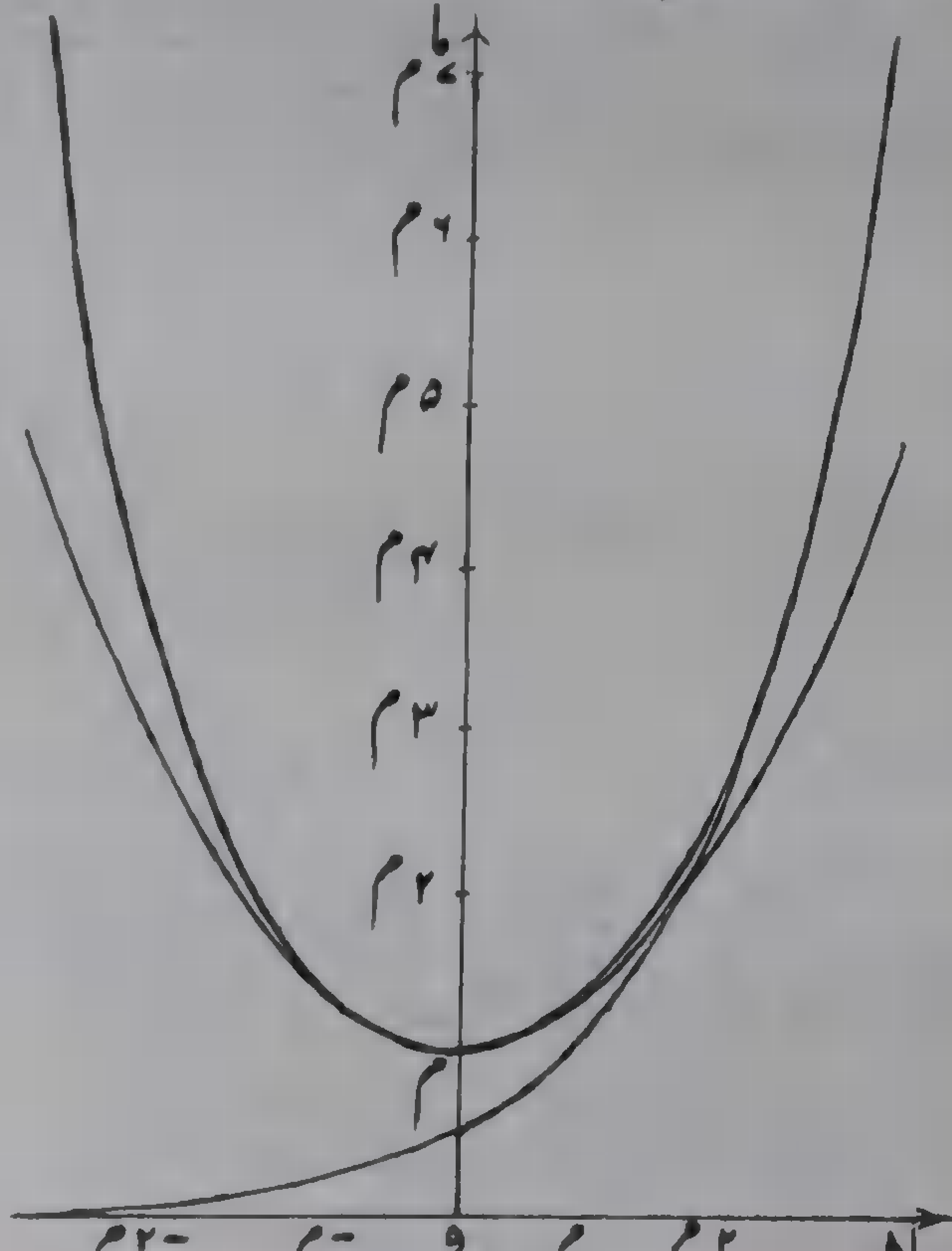
$$ما = م + \frac{لا^{2}}{۲م}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک لا چھوٹا رہتا ہے منحنی قریب قریب ایک مکافی پر منطبق ہوتا ہے جس کا وتر خاص ۲ م یا ۲ ھ/د ہے۔

یہ قطع مکافی وہ ہے جو جھولائی کے تار سے بنتا ہے جبکہ تار کا افقی تناؤ ھ ہو

اور خود پُل کا وزن فی اکائی طول و ہو۔ بلا شک یہ ظاہر ہے کہ جب تار تقریباً اُفقی ہوتا ہے تو اس امر سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ تار کا وزن اس کی قوس کے فی اکائی طول و ہے یا فی اکائی طول پر ایک وزن و اس سے لٹکایا گیا ہے تاکہ وہ افقی طور پر رہے۔

جب' لا بڑا ہو یعنی اُن نقطوں پر جو زیر ترین نقطے سے دور واقع ہیں تو بھی ہم زنجیرہ کا ایک سادہ تقرب حاصل کر سکتے ہیں۔ جب' لا بہت بڑا ہو تو $\frac{لا}{م}$ بہت بڑا ہوگا اور قو$\frac{لا}{م}$ کی قیمت بہت بڑی ہو جائے گی لیکن قو$\frac{-لا}{م}$ کی قیمت بہت چھوٹی ہو جائے گی۔ اسلئے جمز$\frac{لا}{م}$ کی قیمت تقریباً $\frac{1}{2}$ قو$\frac{لا}{م}$ ہو جائے گی اور زنجیرہ کی مساوات (۲۶)

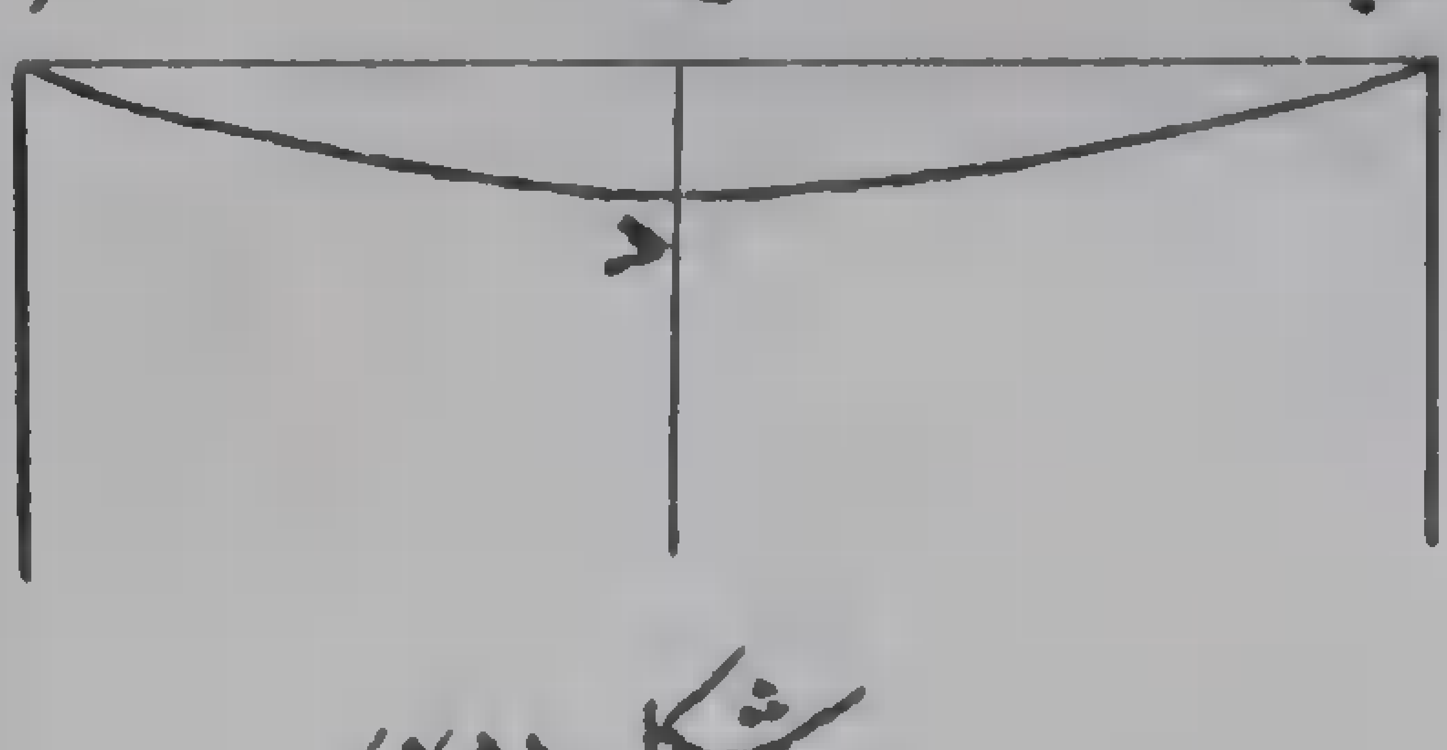


شکل (۴۴)

$$\frac{م_۱}{م} = \frac{۱}{۲} و \frac{ه}{م}$$

ہو جائیگی۔ پس لا کی بڑی قیمتوں کے لئے زنجیرہ قوت نما منحنی پر منطبق ہوتا ہے۔
شکل (۴۴) میں زنجیرہ کی شکل دکھائی گئی ہے۔ باریک منحنی حسب ذیل ہیں:
(ا) قطع مکافی، جس پر زنجیرہ تقریباً منطبق ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں چھوٹی ہوں،
(ب) قوت نما منحنی، جن پر زنجیرہ تقریباً منطبق ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں بڑی ہوں۔

۶۱ ۔ خوب تنی ہوئی ڈوری کا جھوک ۔ جب کوئی ڈوری یا (۸۵)
تار اپنے پورے طول پر تقریباً افقاً تنی ہوئی ہو ـــــ مثلاً تار برقی کا تار ـــــ تو جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ڈوری کافی تقرب تک ایک قطع مکافی بناتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ ا، ب مساوی ارتفاع کے دو ستون ہیں جن کے درمیان ایک تار تنا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور فرض کرو کہ د تار کا وہ نقطہ ہے جو ج کے نیچے انتصاباً واقع ہے۔
اب تشاکل سے تار کا زیر ترین نقطہ د ہوگا اور اس لیے وہ مکافی کا راس ہوگا۔
اس لیے مکافی کی مساوات سے



شکل (۴۵)

$$ج ب^۲ = \frac{۲ ه}{و} ج د$$

کیونکہ اس کا وتر خاص بموجب دفعہ (۶۰) $\frac{۲ ه}{و}$ ہے۔
اِس لیے اگر ف = ا ب تو جھوک ج د، مساوات

$$ج د = \frac{و}{۲ ه} ج ب^۲$$

$$= \frac{۱}{۸} \frac{و ف^۲}{ه} ، \qquad \text{.........} (۴۷)$$

سے حاصل ہوگا۔

تار کا طول معلوم کرنے کے لیے چھوٹی مقداروں کے اعلیٰ تر رتبے لینے ہوں گے اور اس لیے ہمیں زنجیرہ کی مساوات کی طرف رجوع ہونا چاہیئے۔ چنانچہ

$$س = \frac{1}{2} م \left(و^{\frac{لا}{م}} - و^{-\frac{لا}{م}} \right)$$

$$= لا + \frac{1}{6} \frac{لا^3}{م^2} + \ldots\ldots\ldots$$

مطلوبہ مقدار س ۔ لا ہے یعنی د ب ۔ ج ب (شکل ۴۵)۔

جب تار خوب تنا ہوا ہو تو م بہت بڑا ہوتا ہے، اس لیے ہم س کی وہ رقمیں نظر انداز کر سکتے ہیں جو اوپر لکھی ہوئی رقموں کے آگے ہیں۔ پس

$$س - لا = \frac{1}{6} \frac{لا^2}{م^2} \text{، تقریباً}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{و^2 لا^3}{ھ^2}$$

لا = ½ ف رکھ کر ہم معلوم کرتے ہیں کہ طول ف کے فصل میں (۸۶)

کُل اضافہ بوجہ جھوک، $۲ س - ف = \frac{1}{24} \frac{و^2 ف^3}{ھ^2}$ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک جھولا پُل کا کُل بوجھ ۳۲۰ ٹن ہے، فصل ۶۴۰ فٹ، اور ارتفاع ۵۰ فٹ ہے۔ سہارے کے نقطوں پر تناؤ معلوم کرو اور نیز زیر ترین نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک آزادانہ لٹکے ہوئے تار کا وزن ۳۲۰ ٹن ہے۔ سہارے کے دو نقطوں کے درمیان فاصلہ ۶۴۰ فٹ ہے اور یہ نقطے ایک ہی افقی خط میں ہیں

اور اِن کا ارتفاع تار کے زیر ترین نقطے کے اوپر ۵۰ فٹ ہے۔ سہارے کے نقطوں کے تناؤ اور نیز زیر ترین نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک تار برقی سلسلہ کا تار اپنے طول کے ایک میل سے زیادہ کا وزن بغیر ٹوٹے برداشت نہیں کرسکتا۔ اگر تار ۸۸ گز کے مساوی وقفوں سے ستونوں پر تنا ہوا ہو تو کم سے کم قابل اجازت جھوک کیا ہے؟

۴۔ مثال ماسبق میں ایک میل تار برقی سلسلہ کے لیے کتنے تار کی ضرورت ہوگی؟

۵۔ ایک تار برقی سلسلہ ایک خاص قسم کے تار سے جو یکساں فصل کے ستونوں پر تنایا گیا ہو قائم کرنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ستونوں کی تعداد بہت زیادہ ہو تو تار اور ستونوں کی قیمت کا لحاظ کرتے یہ سلسلہ سب سے زیادہ کفایت کے ساتھ تیار کیا جا سکتا ہے اگر ستونوں کی قیمت تار کے اُس زائد طول کی قیمت سے دُگنی ہو جو جھوک کی وجہ سے مطلوب ہے۔

عام مثالیں

۱۔ پتھر کا ایک گنڈ جس کا وزن $\frac{1}{2}$ ٹن ہے ایک ایسی رسی کے ذریعہ اُٹھایا جاتا ہے جو ایک چرخی پر سے جو پتھر کے اوپر انتصاباً واقع ہے گذرتی ہے اور ایک ڈنڈا چرخ پر جس کا قطر ایک فٹ ہے لپٹی ہوئی ہے۔ ڈنڈا چرخ پر دو آدمی کام کرتے ہیں جو ۳ فٹ طول کے گردانے گھماتے ہیں۔ ہر آدمی کو گردانوں کے عمود وار کتنی قوت لگانی چاہیئے۔

۲۔ ایک شخص ایک ترازو کے پلڑے میں بیٹھ کر ۶۰ پونڈ کی قوت سے ڈنڈی کو انتصابی سمت میں اُس نقطہ پر دباتا ہے جو نصاب اور ڈنڈی کے اُس سرے کے وسط میں ہے جس سے اُس کا پلڑا لٹکا ہوا ہے۔ اگر ڈنڈی کا طول ۵ فٹ ہو تو وہ زائد وزن معلوم کرو جو دوسرے پلڑے میں توازن کے لیے رکھنا پڑیگا۔

۳۔ ایک نادرست ترازو کے پلڑے نصاب سے غیر مساوی فاصلوں ا، ب پر لٹکتے ہیں لیکن خالی ہونے پر متوازن رہتے ہیں۔ ایک وزن کو جب دونوں پلڑوں میں تولا جاتا ہے تو اس کے اوزان علی الترتیب ف، ق حاصل ہوتے ہیں۔

اس کا اصلی وزن معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$\frac{ب}{ا} = \boxed{\frac{ق}{ف}}$$

(۸۷) ۴ ـ ایک غیر وزنی ڈوری ۲۴" لمبی دو نقطوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ایک دوسرے سے ۱۶" کے فاصلہ پر ہیں باندھ دی گئی ہے ـ ڈوری کے سروں سے ۹ اور ۷ انچ کے فاصلوں پر دو نقطوں سے اوزان باندھے گئے ہیں جو اس طریقہ سے لٹکتے ہیں کہ ان کے درمیان ڈوری کا حصہ افقی ہے ـ اوزان کی نسبت معلوم کرو ـ

۵ ـ ایک ہلکے تار کے وسطی نقطہ سے ایک وزن لٹکایا گیا ہے اور خود تار کو ایک ڈوری سے سہارا گیا ہے جو اس کے دو سروں پر بندھی ہے اور ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ـ ثابت کرو کہ تار صرف افقی یا انتصابی محل میں ساکن رہ سکتا ہے ـ

۶ ـ تین چکنی کھونٹیاں ا، ب، ج ایک دیوار میں گڑی ہیں اور وہ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راس ہیں ـ ا بلند ترین ہے اور ضلع ب ج افقی ہے ـ ایک ہلکی ڈوری ان کھونٹیوں پر سے صرف ایک مرتبہ گذرتی ہے اور اس کے سرے ایک وزن و سے بندھے ہیں جو ب ج کے نیچے توازن میں لٹکتا ہے ـ ہر ایک کھونٹی پر دباؤ معلوم کرو ـ

۷ ـ وزن ف اور ق کے دو چھلّے ایک غیر وزنی ڈوری میں جس کے سرے ایک بید ہے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں پھسلتے ہیں ڈنڈا افق سے زاویہ ط پر مائل ہے ـ اس ڈنڈے میں ایک ہلکا چھلا جس میں سے ڈوری گذرتی ہے پھسلتا ہے اس طور پر کہ وزنی چھلّے اس کی مخالف سمتوں میں رہتے ہیں ـ تمام تماس چکنے ہیں اور توازن کی حالت میں فہ وہ زاویہ ہے جو ڈنڈے اور ڈوری کے ان حصوں کے درمیان ہے جو ہلکے چھلے سے قریب ہیں ـ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس ط}}{\text{مس فہ}} = \frac{ف - ق}{ف + ق}$$

۸ — دو چھوٹے وزنی حلقے ایک چکنے تار میں پھسلتے ہیں، تار کی شکل قطع مکافی ہے جس کا محور افقی ہے۔ حلقوں کو ایک ہلکی ڈوری سے مربوط کیا گیا ہے جو ماسکہ پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ جب حلقے توازن میں ہوتے ہیں تو محور کے نیچے محور سے اِن کے انتصابی فاصلے اِن کے اوزان کے متناسب ہوں گے۔

۹ — دو برابر وزنی حلقے ایک تار میں پھسلتے ہیں، تار کی شکل ایک قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم انتصابی ہے۔ حلقوں کو ایک ڈوری سے جو اوپر کے ماسکہ پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے مربوط کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے محل تعداد میں لامتناہی ہیں۔

۱۰ — ا ب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے، ضلعوں ا ب، ب ج، ج د، اور د ا پر قوتیں عمل کرتی ہیں جو علی الترتیب اضلاع کا عہ، بہ، جہ، ضہ گنی ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر یہ قوتیں ذروں کے کسی نظام کو توازن میں رکھیں تو

عہ جہ = بہ ضہ

۱۱ — ایک ہلکا ڈنڈا کلاً ایک چکنے نیم کروی پیالہ میں جس کا نصف قطر رہے پڑا ہے اور اس سے ایک وزن و ایک ایسے نقطے پر باندھا گیا ہے جس کے فاصلے ڈنڈے کے سِروں سے ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں ڈنڈے کا میلان افق کے ساتھ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے

۲ √(ر² − ا ب) جب ط = ا − ب

(۴۸) ۱۲ — ایک غیر وزنی ڈنڈا جس پر کمیت ک اور کَ کے کھُردرے منکے لگے ہوئے ہیں ایک مائل مستوی پر پڑا ہے اور وہ ایک محور کے گرد جو ڈنڈے میں سے گذرتا ہے اور مستوی پر عمود ہے آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اگر ڈنڈا افقی محل میں ہو تو ثابت کرو کہ وہ اطراف پھسلنا شروع نہیں کرے گا اِلّا آنکہ

مہ < (ک ا − کَ ب) / (ک ا + کَ ب) مس عہ

جہاں عہ مستوی کا زاویہ ہے اور ا اور ب محور سے علی الترتیب ک اور کَ کے فاصلے ہیں۔

۱۳۔ وزن و کا ایک منکا جو ایک چکنی غیر وزنی ڈوری میں پرویا گیا ہے زاویہ عہ کے ایک مائل مستوی پر ساکن ہے۔ منکے اور مستوی کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ڈوری کے سِرے مستوی کے دو نقطوں ا، ب سے جو ایک ہی ارتفاع پر ہیں باندھے گئے ہیں۔ بتاؤ کہ منکے کے انتہائی توازن کے محل کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ثابت کرو کہ ایسے محل ن میں ڈوری کا تناؤ حسب ذیل ہے:

$$\frac{1}{2}\ \text{و قط}\ \frac{1}{2}\ (\text{ان ب} \times \text{جم عہ})\ (\text{مس}^{2}\text{عہ} - \text{مہ}^{2})^{\frac{1}{2}}$$

۱۴۔ ایک یکساں ڈوری ایک کھردرے کرہ پر رکھی گئی ہے اس طور پر کہ وہ ایک افقی چھوٹے دائرہ پر جس کا ارتفاع عہ ہے پڑی ہوئی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ڈوری نصف النہاروں پر عین پھسلنے کو ہے تو تناؤ مستقل ہے اور و مم (عہ + صہ) کے مساوی ہے جہاں و ڈوری کے اُس طول کا وزن ہے جو دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے اور صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۵۔ ایک غیر وزنی ڈوری دو ثابت نقطوں سے لٹکی ہوئی ہے اور اس کے معلومہ نقطوں پر مساوی اوزان بند ہے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈوری کے مختلف حصوں کے افق کے ساتھ جو میلانات ہیں اُن کے مماس ایک سلسلہ حسابیہ بناتے ہیں۔

۱۶۔ ایک چکنی نیم دائری نلی کو ۲ ن مساوی چکنے منکوں سے جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے پُر کیا گیا ہے، یہ منکے نلی میں عین ٹھیک بیٹھتے ہیں۔ نلی ایک انتصابی مستوی میں قائم ہے اور اس کے سِرے مساوی ارتفاع پر ہیں۔ اگر سِرے سے م ویں اور (م + ۱) ویں منکوں کے درمیان دباؤ کام ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{کام} = \text{و جب}\ \frac{\text{م}\,\pi}{\text{۲ن}}\ \text{قم}\ \frac{\pi}{\text{۲ن}}$$

۱۷۔ مثال ماسبق میں فرض کرو کہ منکوں کو لا انتہا چھوٹا کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی دو منکوں کے درمیان دباؤ نلی کے سِرے کے نیچے گہرائی کے متناسب ہوگا

۱۸ — ایک وزنی ڈوری دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی ہمواری پر اور ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں لٹکی ہوئی ہے۔ ڈوری کے دونوں سرے آزادانہ لٹک رہے ہیں اور مرکزی حصہ ایک زنجیرہ کی شکل میں لٹک رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے امکان کے لیئے ڈوری کا کل طول ا ز سے کم نہ ہونا چاہیئے۔

۱۹ — وزن و کی ایک ڈوری دو نقطوں سے جو ایک ہی ہمواری پر ہیں لٹکائی گئی ہے اور اس کے زیر ترین نقطے سے ایک وزن وَ باندھا گیا ہے۔ اگر بلند ترین اور زیر ترین نقطوں پر کے مماس انتصابی سے زاویوں عہ، بہ پر مائل ہوں تو ثابت کرو کہ (۸۹)

$$\frac{\text{مس عہ}}{\text{مس بہ}} = 1 + \frac{\text{و}}{\text{وَ}}$$

۲۰ — طول ل کی ایک وزنی ڈوری دو نقطوں پر سہاری گئی ہے اور ان نقطوں پر ڈوری انتصابی سے زاوئے عہ، بہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کا ارتفاع دوسرے نقطہ کے اوپر

$$\text{ل جم } \frac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ قط } \frac{1}{2}(\text{عہ} - \text{بہ})$$

ہے۔

۲۱ — ثابت کرو کہ کم سے کم قوت کی سمت جو ایک گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے زمین سے زاویہ طہ پر مائل ہوتی ہے جہاں ا جیب طہ = ب جیب حہ، پہیوں اور محوروں کے نصف قطر علی الترتیب ا اور ب ہیں اور حہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۹۰)

پانچواں باب

اُستواراجسام کا علم سکون

اُستواری

۶۲ — اگر ہم چکنی مٹی کے گیلے ڈھیلے یا نرم موم کو اُنگلی سے دبائیں تو مٹی یا موم میں نشان پڑ جائے گا۔ ہم نے اُنگلی سے جو قوت لگائی ہے اُس نے جسم کی شکل میں تبدیلی پیدا کردی۔ اگر ہم اُنگلی سے جیلی کی کمیت کو دبائیں تو جیلی میں کوئی نشان نہیں پڑے گا لیکن ہم دیکھیں گے کہ جب تک قوت عمل کرتی ہے جیلی کی شکل بدلی رہتی ہے اگرچہ کہ وہ اپنی اصلی شکل پر عود کرتی ہے جبکہ دباؤ ہٹ جاتا ہے۔

برخلاف ازیں اگر ہم سیسے کی گولی یا ہاتھی دانت کے بلیرڈ گولے کو اُنگلی سے دبائیں تو شکل کی کوئی تبدیلی قوت لگانے کے اثناء میں یا اس کے بعد نظر نہیں آئے گی۔ معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ سیسہ اور ہاتھی دانت مٹی اور موم سے زیادہ سخت ہیں اور علمی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ وہ زیادہ اُستوار ہیں۔

۶۳ — کامل طور پر اُستوار جسم وہ ہوگا جو کسی قوت کے تحت خواہ یہ قوت کتنی ہی بڑی ہو اپنی شکل نہ بدلے۔ گولی اور بلیرڈ گولہ کامل طور پر اُستوار نہیں ہیں کیونکہ بلیرڈ گولہ جب دوسرے گولے سے ٹکراتا ہے تو ٹکر کی اثناء میں اس کی شکل بگڑی ہوئی رہتی ہے لیکن فوراً بعد ہی وہ اپنی شکل پر آجاتا ہے۔ گولی

نشانہ پر لگتے ہی دبتی ہے اور اس کی شکل مستقلاً تبدیل ہو جاتی ہے۔ کامل طور پر اُستوار جسم فطرت میں موجود نہیں ہے، بلیرڈ کے گولے یا سیسی کی گولی کامل طور پر اُستوار سمجھے جا سکتے ہیں صرف اس وقت تک کہ ان پر کوئی بہت بڑی قوت عمل نہ کرے۔

کامل طور پر اُستوار جسم کی تعریف ریاضی کی زبان میں حسب ذیل ہے:

ایک جسم کامل طور پر اُستوار ہوتا ہے اگر اس کے کسی دو ذرّوں کا درمیانی فاصلہ غیر متغیر رہے خواہ جسم پر کوئی قوتیں عمل کریں۔

۶۴۔ کوئی اُستوار جسم اپنے اندر کسی خط کی سمت کو بدلے بغیر فضاء میں (91) حرکت کر سکتا ہے، ایسی حرکت کو **حرکت انتقال** کہتے ہیں۔ نیز وہ کسی نقطہ ن کے گرد ن کے محل کو بدلے بغیر گھوم سکتا ہے ایسی حرکت کو ن کے گرد **گردش کی حرکت** کہتے ہیں۔ نیز اس میں ایسی حرکت ہو سکتی ہے جو حرکتِ انتقال اور گردش کی حرکت سے مرکب ہو۔ اور ہم ثابت کریں گے کہ یہ وہ عام سے عام حرکت ہے جو جسم اختیار کر سکتا ہے۔

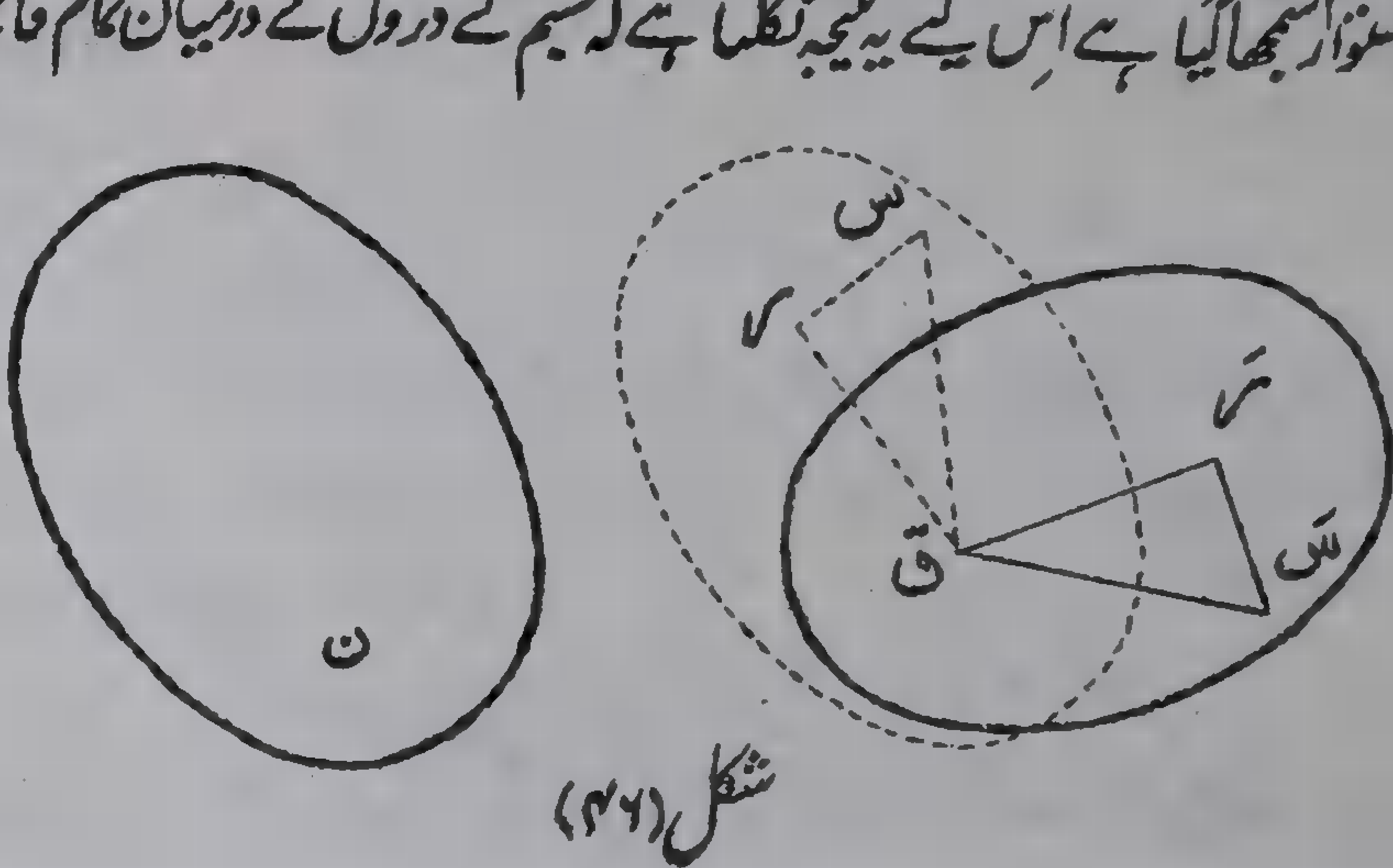
۶۵۔ سب سے اول ہمیں یہ معلوم ہونا چاہئے کہ کوئی اُستوار جسم ثابت ہوگا جبکہ اس کے کوئی تین نقطے ثابت ہوں بشرطیکہ یہ تین نقطے ایک خطِ مستقیم میں واقع نہ ہوں۔ کیونکہ فرض کرو کہ یہ نقطے ا، ب، ج ہیں۔ اگر ہم ا اور ب کو ثابت کریں تو چونکہ جسم بموجب فرض کامل طور پر اُستوار ہے اس لیے کوئی حرکت جو وقوع پذیر ہو سکتی ہے ایسی ہونی چاہئے جس میں ا اور ب سے کسی دوسرے نقطہ ن کے فاصلے غیر متغیر رہیں۔ اس لیے ن کو اب کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرنا چاہئے اور جسم کی حرکت خط اب کے گرد گردش کی حرکت ہونی چاہئے۔ پس اگر ا، ب، ج ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں تو ج کو اب کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرنا چاہئے۔

لیکن اگر ج بھی ثابت ہو تو ایسا ہو نہیں سکتا' بالفاظ دیگر کوئی حرکت وقوع پذیر نہیں ہو سکتی' اِس لیے جسم اپنے محل میں ثابت ہے ۔
اِس طرح کسی اُستوار جسم کا محل متعین ہو جاتا ہے جبکہ اِس کے تین نقطوں کے محل معلوم ہوں بشرطیکہ یہ تین نقطے ایک ہی خط مستقیم میں نہ ہوں ۔

۶۶ ۔ اب ہم حسب ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں ۔

کسی اُستوار جسم کی عام سے عام حرکت حرکتِ انتقال اور گردش کی حرکت سے مُرکب ہوتی ہے ۔

شکل (۴۶) میں فرض کرو کہ بائیں جانب کی شکل جسم کو اِس کے ابتدائی محل میں تعبیر کرتی ہے اور فرض کرو کہ دائیں جانب کا جلی منحنی جسم کو تعبیر کرتا ہے جبکہ وہ کسی طرح حرکت کر چکا ہے ۔ فرض کرو کہ جسم کے ابتدائی محل میں اِس کے کسی ذرے کا مقام ن ہے اور فرض کرو کہ حرکت واقع ہونے کے بعد اسی ذرے کا مقام ق ہے ۔
اولاً فرض کرو کہ جسم اپنے ابتدائی محل سے اس طریقہ پر حرکت کر چکا ہے کہ نقطہ ن نقطہ ق تک حرکت کرتا ہے لیکن جسم کے تمام خطوط اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتے ہیں یہ حرکت خالص حرکتِ انتقال ہے اِس حرکت کے وقوع کے بعد ہم جسم کو نقطہ ق کے گرد اِس طریقے سے گھما سکتے ہیں کہ وہ گھوم کر آخری محل میں آ جائے ۔ کیونکہ فرض کرو کہ جسم کے کوئی دو دوسرے نقطے مَ' سَ ہیں (جو ق کے ساتھ ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں) اور فرض کرو کہ ان کے آخری محل مَ' سَ ہیں ۔ چونکہ جسم کو کامل طور پر اُستوار سمجھا گیا ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کے ذروں کے درمیان تمام فاصلے (۹۲)

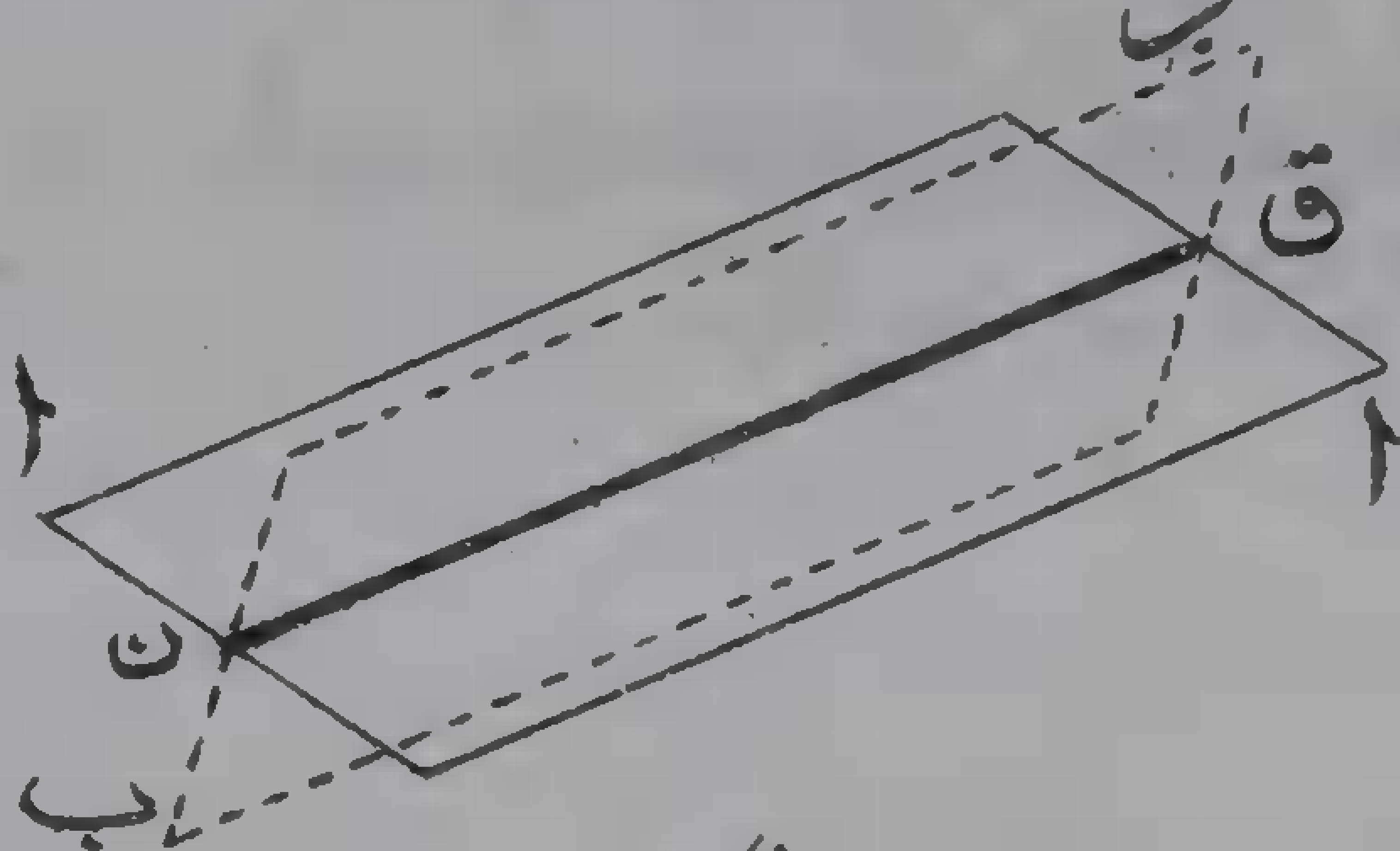


شکل (۴۶)

غیر متغیر رہتے ہیں۔ اِس لیے فاصلے ق ر، ر س، س ق علی الترتیب ق رَ، رَ سَ، سَ ق کے مساوی ہیں۔ اِس لیے مثلثات ق ر س اور ق رَ سَ ہر طرح آپس میں برابر ہیں اور اِس لیے ایک دوسرے پر منطبق کئے جا سکتے ہیں۔ پس اِن مثلثوں کو ایک دوسرے پر منطبق کرنے کی حرکت مطلوبہ حرکت ہے اور یہ حرکت ق کے گرد خالص گردش کی حرکت ہے کیونکہ ق حرکت نہیں کرتا۔

اب چونکہ اُستوار جسم کا محل ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے کوئی تین نقطے ثابت ہوں اِس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ استوار جسم صرف ایک محل اختیار کر سکتا ہے جس میں یہ تین نقطے ق، ر، س معلومہ مقامات پر ہوں۔ لیکن اُس حرکت کے بعد جس کو ہم نے بیان کیا ہے تین نقطے ق، ر، س اپنے آخری مقامات پر ہیں۔ اِس لیے پورا جسم اپنے آخری محل میں ہونا چاہئے اور اِس لئے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۶۷۔ گردش کا محور۔ گردش کی حرکت میں فرض کرو کہ ن وہ نقطہ ہے جو ثابت رہتا ہے۔ ن میں سے گذرنے والا کوئی مُستوی ا لو اور فرض کرو کہ گردش واقع ہونے کے بعد اس مُستوی کا محل ب ہے۔ یہ دو مُستوی ن میں سے گذرتے ہیں اور اِس لیے ن میں سے گذرنیوالے ایک خط ن ق میں متقاطع ہونے چاہئیں۔ اس خط کو گردش کا محور کہتے ہیں۔ گردش کو ایک خیالی نقطے کے گرد جو گردش کے محور پر دوڑے گھماؤ کے طور پر خیال کیا جا سکتا ہے۔



شکل (۴۷)

کسی اُستوار جسم کے توازن کی شرطیں

۶۸ ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی اُستوار جسم ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے تین نقطے جو ہم خط نہوں ثابت ہوں اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ استوار جسم پر خواہ کتنی ہی قوتیں عمل کریں ہم ہمیشہ اس کو اس کے تین نقطوں پر جو ہم خط نہوں تین مناسب طور پر منتخبہ قوتیں لگا کر ساکن رکھ سکتے ہیں ۔

اِن قوتوں کو خاص طریقے سے منتخب کیا جا سکتا ہے ۔

فرض کرو کہ ا، ب، ج کوئی تین نقطے ہیں صرف اس شرط کے تحت کہ وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ۔ ا پر کے ذرے پر عمل کرنیوالی قوت کا مناسب انتخاب کر کے ہم ہمیشہ نقطہ ا کو ساکن بنا سکیں گے ۔

جب ا ثابت ہو جائے تو ب حرکت پر مائل ہوگا یا نہیں ہوگا۔ اگر ب حرکت پر مائل ہے تو ب کی حرکت کی سمت، ب ا پر عمود ہونی چاہئے کیونکہ ا حرکت نہیں کر سکتا ۔ پس ا ثابت ہو جانے کے بعد ب پر ب ا کے عمود وار ایک قوت لگانے سے ب کو ثابت کرنا ممکن ہونا چاہئے ۔

جب ا اور ب دونوں ثابت ہو جائیں تو تیسرے نقطہ ج کے لئے جو حرکت ممکن ہے وہ صرف ا ج اور ب ج دونوں کے عمود وار ہے یعنے مُستوی ا ب ج کے عمود وار ۔ اِس طرح ج کو ایک قوت کے ذریعہ جو مُستوی ا ب ج پر عمود ہو ساکن رکھا جا سکتا ہے اور اس لئے پورا جسم اب ساکن ہے ۔ اِس لیے یہ ثابت ہو چکا کہ کسی اُستوار جسم کو قوتوں کے کسی نظام کے عمل کے خلاف ساکن رکھا جا سکتا ہے اگر حسبِ ذیل قوتیں تین اختیاری طور پر منتخبہ نقطوں ا، ب، ج پر جو ہم خط نہ ہوں لگائی جائیں :

(ا) ایک قوت نقطہ ا پر، سمت نامعلوم

(ب) ایک قوت ب پر، سمت خط ا ب کے عمود وار،

(ج) ایک قوت ج پر، سمت مستوی ا ب ج کے عمود وار ۔

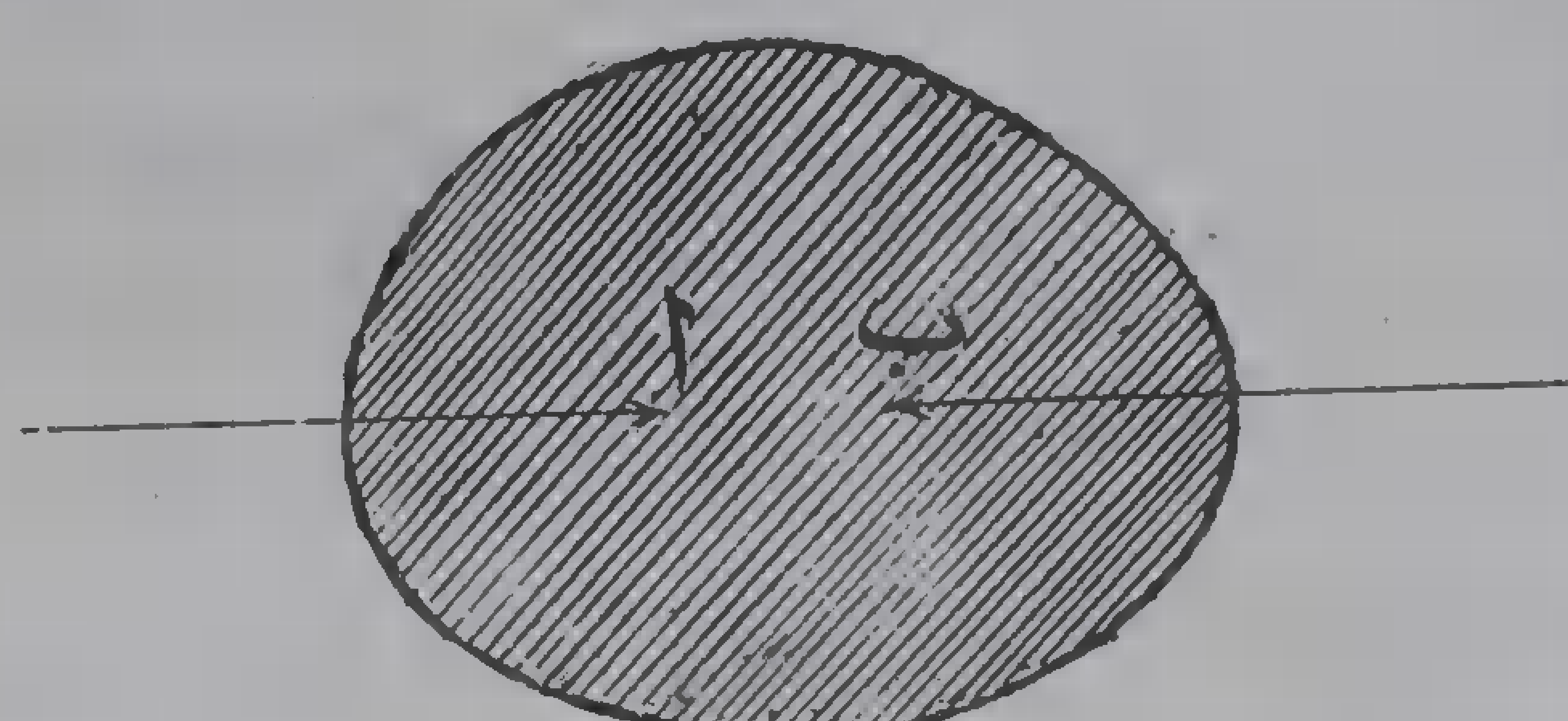
وہ شرط کہ قوتوں کا اصلی نظام جسم کو توازن میں رکھے یہ ہے کہ جسم کو ثابت

کرنے میں کوئی مزید قوتیں مطلوب نہوں اور اس لیے نقطوں ا، ب، ج پر جو قوتیں داخل کی گئی ہیں ان میں سے ہر ایک کو معدوم ہونا چاہیئے۔

قوت کی انتقال پذیری (۹۴)

۶۹ ـ ایک اُستوار جسم پر غور کرو جس پر دو قوتیں $و_ا$ اور $و_ب$، دو نقطوں ا اور ب پر عمل کرتی ہیں، یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہیں لیکن مخالف سمتوں اب اور ب ا میں عمل کرتی ہیں۔

اُستوار جسم ان دو قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہوگا یا اس کو تین قوتوں $ف_ا$، $ف_ب$، $ف_ج$ کے ذریعے جو نقطوں ا، ب، اور کسی تیسرے نقطہ ج (جو خط اب میں نہیں ہے) پر عمل کرتی ہیں ساکن رکھا جا سکتا ہے، یہ قوتیں اُن سمتوں میں عمل کرتی ہیں جن کو قبل ازیں ظاہر کیا جا چکا ہے یعنے $ف_ج$ مستوی اب ج کے عمود وار اور $ف_ب$ خط اب کے عمود وار۔



شکل (۴۸)

فرض کرو کہ یہ قوتیں بشرط ضرورت عائد کی گئی ہیں اور اس لیے جسم قوتوں $و_ا$، $و_ب$، $ف_ا$، $ف_ب$، $ف_ج$ کے زیر عمل توازن میں ہے۔

جسم چونکہ توازن میں ہے اس لیے کسی خط کے گرد اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ یا کسی سمت میں اِن کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ حسب دفعہ (۵۰)

معدوم ہونا چاہیئے۔

فرض کرو کہ ہم خط اب کے گرد معیاروں کے مجموعے پر غور کرتے ہیں۔ قوتیں $و_{ا}$، $و_{ب}$، $ف_{ا}$، $ف_{ب}$ سب کی سب اس خط سے ملتی ہیں اور اس لیے ان میں سے ہر قوت کا معیار معدوم ہوتا ہے۔ اس طرح خط اب کے گرد معیاروں کا مجموعہ واحد قوت $ف_{ج}$ کے معیار پر مشتمل ہے اور اس لیے ان معیاروں کے مجموعے کے معدوم ہونے کے لیے $ف_{ج}$ کے معیار کو معدوم ہونا چاہیئے۔ اب قوت $ف_{ج}$ کا معیار صرف اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ خود قوت $ف_{ج}$ صفر کے مساوی ہو۔ جس کے یہ معنے ہیں کہ کوئی قوت جسم کو اب کے گرد گھومنے سے روکنے کے لیے مطلوب نہیں ہے۔

پس جسم دو قوتوں $ف_{ا}$ اور $ف_{ب}$ کے زیر عمل ساکن ہے اور (۹۵)
اس لیے قوتوں $ف_{ا}$، $ف_{ب}$، $و_{ا}$، $و_{ب}$ کے زیر عمل توازن میں ہے۔

ا میں سے گذرنے والے اور اب پر عمود وار خط کے گرد معیار لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $ف_{ا}$، $و_{ا}$، $و_{ب}$ کے معیار معدوم ہوتے ہیں اور اسلیے اس خط کے گرد ان چار قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونے کے لیے $ف_{ب}$ کا معیار صفر کے مساوی ہونا چاہیئے اور اس لیے خود $ف_{ب}$ کو صفر کے مساوی ہونا چاہیئے اس طرح جسم کو ساکن رکھنے کے لیے جو قوت مطلوب ہے وہ صرف ا پر کی قوت $ف_{ا}$ ہے۔

لیکن اب توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ $و_{ا}$، $و_{ب}$ اور $ف_{ا}$ کے

اجزائے ترکیبی کا مجموعہ کسی سمت میں معدوم ہو۔ و ا اور و ب کے اجزائے ترکیبی مساوی اور مختلف ہیں اس لیے ف ا کا جزو ترکیبی ہر سمت میں معدوم ہونا چاہیئے یعنے ف ا صفر کے مساوی ہونا چاہیئے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ اُستوار جسم دو قوتوں و ا اور و ب کے زیر عمل توازن میں ہے۔

۷۰ — دفعہ ماسبق سے فوراً ایک اصول جو قوت کے انتقال پذیری کے طور پر مشہور ہے حاصل ہوتا ہے۔

کسی قوت کا اثر جو ایک اُستوار جسم پر عمل کرے اس کی مقدار اور اُس خط پر جس پر وہ عمل کرتی ہے منحصر ہوتا ہے۔ لیکن اس خط میں اُس مخصوص ذرّے پر منحصر نہیں ہوتا جس پر قوت لگائی گئی ہے۔



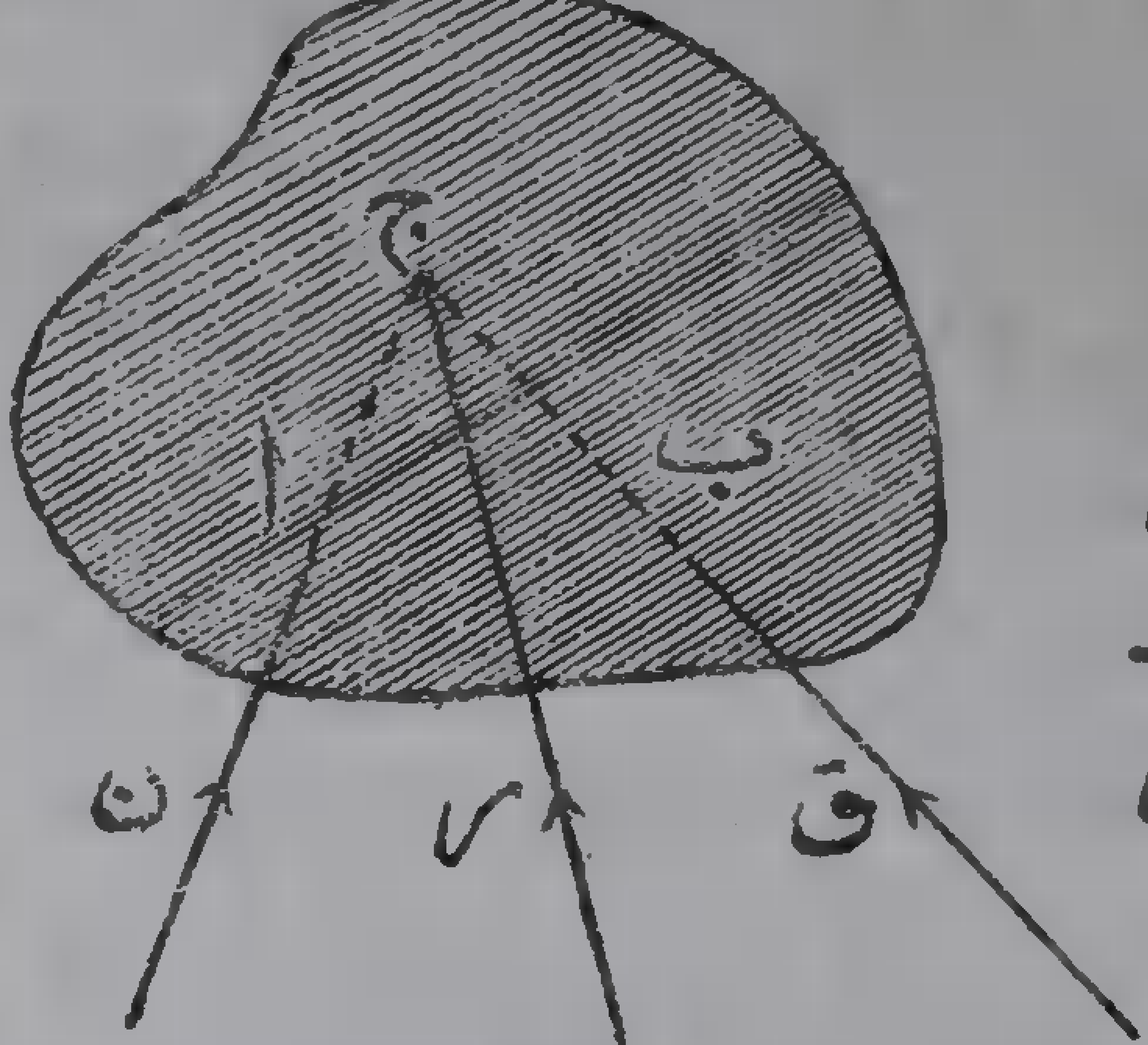
شکل (۴۹)

کیونکہ فرض کرو کہ قوت کے خط عمل کے کسی دو نقطوں ق اور ر پر وہی قوت لگائی گئی ہے۔ ر پر ایک مساوی اور مخالف قوت ان دو قوتوں میں سے کسی ایک کی تعدیل کر سکتی ہے اور اسلئے یہ قوتیں متماثل ہیں۔

ایک مستوی میں عمل کرنیوالی قوتوں کی ترکیب

۷۱ — فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم کے دو نقطوں ا، ب پر دو قوتیں ف، ق عمل کرتی ہیں اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مستوی میں واقع ہیں۔ اب یہ دو خطوط عمل، نقطوں ا، ب سے آگے (بشرط ضرورت) خارج کرنے پر کسی نہ کسی نقطہ ج پر ملیں گے۔

قوت کے انتقال پذیری کے اُصول سے یہ ظاہر ہے کہ قوت ف خواہ ا پر عمل کرے یا ج پر ایک ہی بات ہے ۔ فرض کرو کہ وہ ج پر عمل کر رہی ہے ۔ اسی طرح (۹۶) فرض کرو کہ قوت ق' ب کی بجائے ج پر عمل کر رہی ہے ۔ اب جسم پر عمل کرنیوالی دو قوتیں ف' ق ہیں جو ایک ہی ذرہ ج پر عمل کرتی ہیں ۔ ان قوتوں کو تیسرے باب میں سمجھائے ہوئے قاعدوں کی بموجب ایک واحد قوت ر میں جو ج پر عمل کرتی ہے مرکب کیا جا سکتا ہے ۔ پس ہم قوتوں کو مرکب کر سکتے ہیں جبکہ خطوطِ عمل متقاطع ہوں اگرچہ وہ ایک ہی ذرہ پر عمل نہ کریں ۔

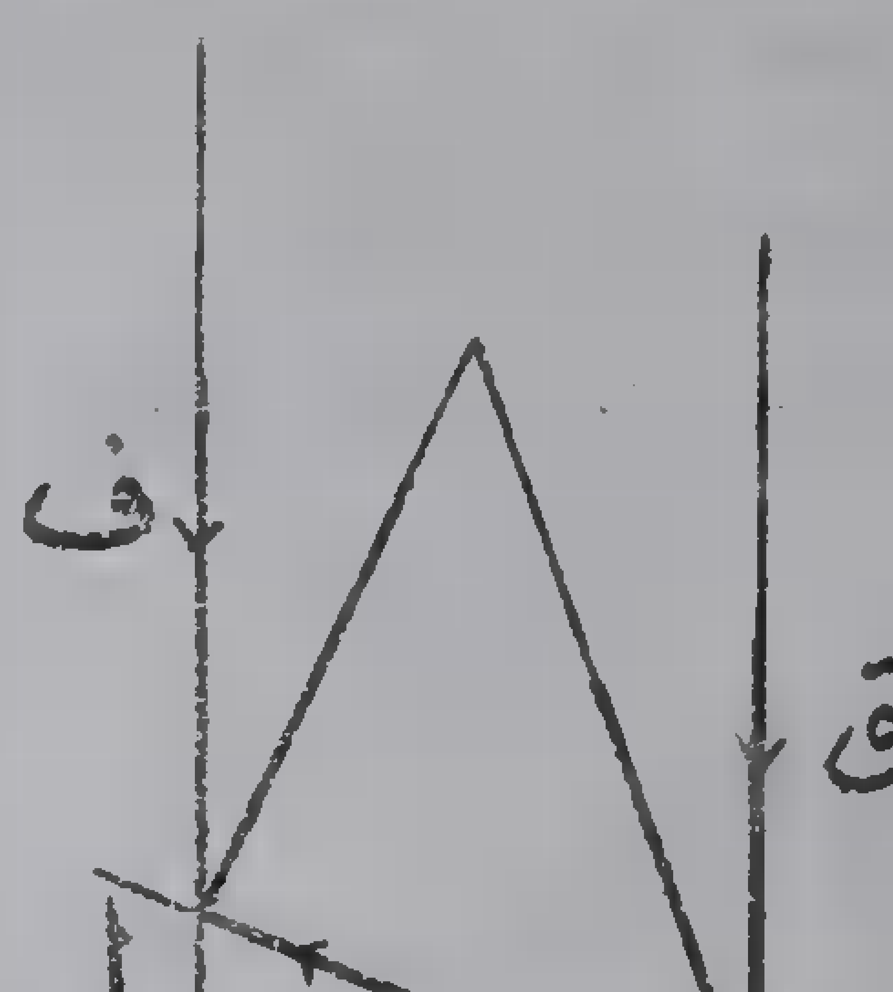


شکل (۵۰)

دو قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کر لینے کے بعد ہم اس حاصل قوت کو کسی تیسری قوت کے ساتھ جو اُسی مستوی میں واقع ہو دو ابتدائی قوتوں کے طور پر مُرکب کر سکتے ہیں اور اس طرح تین قوتوں کا حاصل دریافت کر سکتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس ۔

پس قوتوں کی کسی تعداد کو جو سب کی سب ایک مستوی میں واقع ہوں ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے ۔ اس قوت کو ابتدائی قوتوں کا حاصل کہتے ہیں ۔

۷۲ ۔ ایک مستثنےٰ صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ ہم دو متوازی قوتوں کو مرکب کرنے کی کوشش کرتے ہیں کیونکہ اس صورت میں خطوطِ عمل متقاطع نہیں ہوتے ۔ لیکن یہ مشکل آسانی سے حل ہو جاتی ہے ۔ فرض کرو کہ دو قوتیں ف' ق ہیں جن کو مرکب کرنا ہے اور فرض کرو کہ ا ب کوئی خط ہے جو ان کے خطوطِ عمل کو ا' ب پر



شکل (۵۱)

قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ قوتوں کے اِس نظام میں باہم دو قوتیں

(ا) ایک قوت س جو ب ا پر عمل کرتی ہے،

(ب) ایک قوت س جو ا ب پر عمل کرتی ہے، داخل کرتے ہیں۔

یہ دو قوتیں چونکہ مساوی اور مخالف ہیں اس لئے انہیں بغیر کسی اثر کے داخل کیا جا سکتا ہے۔ پہلی قوت کو ف کے ساتھ مرکب کرنے سے حاصل فَ ملتا ہے جو ا پر عمل کرتا ہے، اسی طرح دوسری قوت کو ق کے ساتھ مرکب کرنے سے حاصل قَ ملتا ہے جو ب پر عمل کرتا ہے۔ اس طرح ابتدائی قوتوں ف، ق کی بجائے دو نئی قوتیں فَ، قَ حاصل ہوتی ہیں (۹۷)
اِن قوتوں کے خطوطِ عمل بالعموم متوازی نہیں ہوں گے اور اس لیے اِن کو ایک واحد قوت میں جو اِن کے نقطہ تقاطع میں سے گذرتی ہے مُرکب کیا جا سکتا ہے۔

۳۷ — فرض کرو کہ ابتدائی قوتیں جن کو مرکب کرنا ہے س$_1$، س$_2$، س$_3$... ہیں اور ان کو ایک واحد حاصل س میں مرکب کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اُس مُستوی میں جس میں یہ قوتیں عمل کرتی ہیں محاور لا، ما لئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اِن محوروں کی سمتوں میں س$_1$ کے اجزائے ترکیبی لا$_1$، ما$_1$ ہیں، س$_2$ کے لا$_2$، ما$_2$ اور علیٰ ہٰذا القیاس۔ بالآخر فرض کرو کہ س کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔

قوتوں کا یہ نظام جس میں ابتدائی قوتیں س$_1$، س$_2$، س$_3$، .... اور حاصل س (بہ سمت مخالف) شامل ہیں ایک ایسا نظام ہے جو توازن میں ہے۔ اِس لیے قوتوں کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے

$$لا_1 + لا_2 + لا_3 + \dots - لا = ۰،$$

$$ما_1 + ما_2 + ما_3 + \dots - ما = ۰۔$$

اس لئے س کے اجزائے ترکیبی مساواتوں

$$\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \ldots\ldots ,$$

$$\text{ما} = \text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3 + \ldots\ldots ,$$

سے حاصل ہوتے ہیں اور ر کی مقدار مساوات

$$\text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2$$

سے معلوم کیجا سکتی ہے۔ وہ زاویہ طہ جو ر کا خط عمل محور لا کے ساتھ بناتا ہے مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ر کے خط عمل کا محل معلوم کرنے کے لیے ہم اس واقعہ کا استعمال کرتے ہیں کہ اُسی مستوی کے کسی نقطہ کے گرد قوتوں ر۱، ر۲، ر۳ .... اور -ر کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔ اس سے کسی نقطہ کے گرد ر کا معیار معلوم ہوتا ہے اور اس لیے چونکہ ر کی مقدار اور سمت معلوم ہے ہم اس کے خط عمل کا محل معلوم کر سکتے ہیں۔

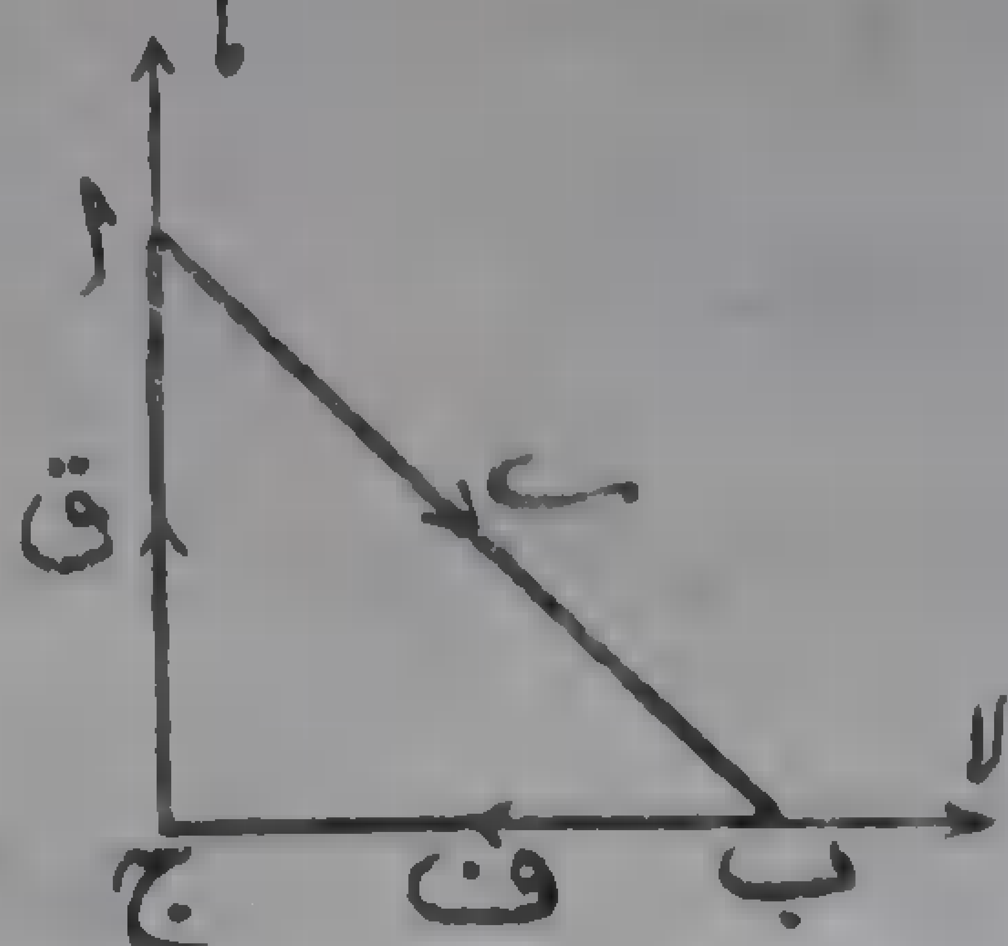
(۹۸)
توضیحی مثال

قوتیں ف، ق، ر، ایک استوار جسم پر عمل کرتی ہیں، یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں اور اِن کے خطوطِ عمل ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں جس کے اضلاع ا، ا، $\sqrt{2}$ ا ہیں۔ ان کا حاصل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور قوتیں ف، ق، ر علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر عمل کرتی ہیں۔ ج کو مبداء فرض کرو اور ج ا، ج ب کو محاور ما، لا لو۔

فرض کرو کہ حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔ تب ج لا کی سمت میں

تحلیل کرنے سے



شکل (۵۲)

$$\text{لا} = -\text{ف} + \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}$$

اور اسی طرح ج ما کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\text{ما} = \text{ق} - \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}$$

اس لیے حاصل کی مقدار ح، مساوات

$$\text{ح}^{۲} = \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \left(-\text{ف} + \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} + \left(\text{ق} - \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}$$

$$= \text{ف}^{۲} + \text{ق}^{۲} + \text{ر}^{۲} - \sqrt{۲}\,\text{ر}\,(\text{ف} + \text{ق})$$

سے حاصل ہوگی۔ زاویہ طہ جو یہ حاصل، محور ج لا سے بناتا ہے مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = -\frac{\text{ر} - \sqrt{۲}\,\text{ق}}{\text{ر} - \sqrt{۲}\,\text{ف}}$$

سے حاصل ہوگا۔

خط عمل معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج کے گرد ح کا معیار، قوتوں ف، ق، اور ر کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہونا چاہئے۔ اگر حاصل ح کے خط عمل پر ج سے عمود ع ہو تو

$$\text{ح}\,\text{ع} = \text{ر}\,\frac{\text{ا}}{\sqrt{۲}}$$

اس لئے

$$\text{ع} = \frac{\text{ر}}{\text{ح}}\,\frac{\text{ا}}{\sqrt{۲}}$$

اور اس سے ح کا خط عمل معلوم ہوتا ہے۔

مثالیں

(تمام قوتیں اُستوار اجسام پر عمل کرتی ہیں)

۱۔ ا ب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں ا ب، ب ج، ج د پر علی الترتیب ۱، ۲، ۳ پونڈ کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ حاصل کی مقدار اور خط عمل معلوم کرو۔

۲۔ ا ب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں ا ب، ب ج، ج د، د ا پر قوتیں ف، ق، ر، س عمل کرتی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ اِن کا حاصل، مربع کے مرکز میں سے گذرے۔

۳۔ مثال (۲) میں وہ شرط کیا ہے کہ

(ا) حاصل نقطہ ا میں سے گذرے،

(ب) حاصل نقطہ ب میں سے گذرے،

(ج) چاروں قوتیں توازن میں ہوں۔

۴۔ قوتیں ف، ق، ر، ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمل (۹۹)
کرتی ہیں اور اِن کا حاصل، مثلث کے اندرونی و بیرونی دائروں کے مرکزوں میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{جم ا} - \text{جم ب}} = \frac{\text{ق}}{\text{جم ج} - \text{جم ا}} = \frac{\text{ر}}{\text{جم ب} - \text{جم ج}}$$

۵۔ اگر چار قوتیں جو ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع مستوی ہونا چاہیئے۔

۶۔ ا ب ج د ایک مستوی ذواربعۃ الاضلاع ہے اور قوتیں جو ا ب، ج ب، ج د، ا د سے تعبیر ہوتی ہیں اِن ضلعوں پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر توازن موجود ہو تو یہ ذواربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہونا چاہیئے۔

۷۔ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرے میں کھینچا جا سکے تو ثابت کرو کہ قوتیں جو اِس کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور متقابلہ ضلعوں کے متناسب ہیں اِس کو توازن میں رکھیں گی۔ نیز ثابت کرو کہ اِس کا عکس بھی درست ہے یعنے یہ کہ توازن کے لیے قوتوں کو متقابلہ اضلاع کے متناسب ہونا چاہیئے۔

۸۔ ایک ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرے میں بنایا گیا ہے اور چار قوتیں

اِس کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور اِن ضلعوں کے طولوں کے بالعکس متناسب ہیں ثابت کرو کہ حاصل کا خطِ عمل وہ خط ہے جو متقابلہ اضلاع کے زوجوں کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے۔

۹ — چار قوتیں ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور علی الترتیب اِن ضلعوں کے طولوں کے ا، ب، ج، د گُنے کے مساوی ہیں۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ

ا ج = ب د

اور یہ کہ مزید شرطیں جو توازن کے لیے ضروری ہیں یہ ہیں کہ نسبتیں ا : ب اور ب : ج وہ نسبتیں ہونی چاہئیں جن میں وتر اپنے نقاطِ تقاطع پر تقسیم ہوتے ہیں۔

۱۰— مثال ماسبق میں ثابت کرو کہ پہلے ضلع سے عمودی فاصلے ذو اربعۃ الاضلاع کے اُن دو نقطوں سے جو اس ضلع پر نہیں ہیں حسب ذیل نسبت میں ہیں

ا (ج – ب) : د (ب – ا)

متوازی قوتیں

۴۷ — فرض کرو کہ دو متوازی قوتوں ف اور ق کا حاصل معلوم کرنے کے لئے ہم وہ طریقہ استعمال کرتے ہیں جو اوپر سمجھایا گیا ہے۔

ف کے خطِ عمل پر کسی نقطہ و کو مبدأ فرض کرو اور ف کے اِس خطِ عمل کو محور و ما لو، شکل (۵۳)۔ فرض کرو کہ حاصل ر ہے اور اُس کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔ تب تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا = ۰،

ما = ف + ق

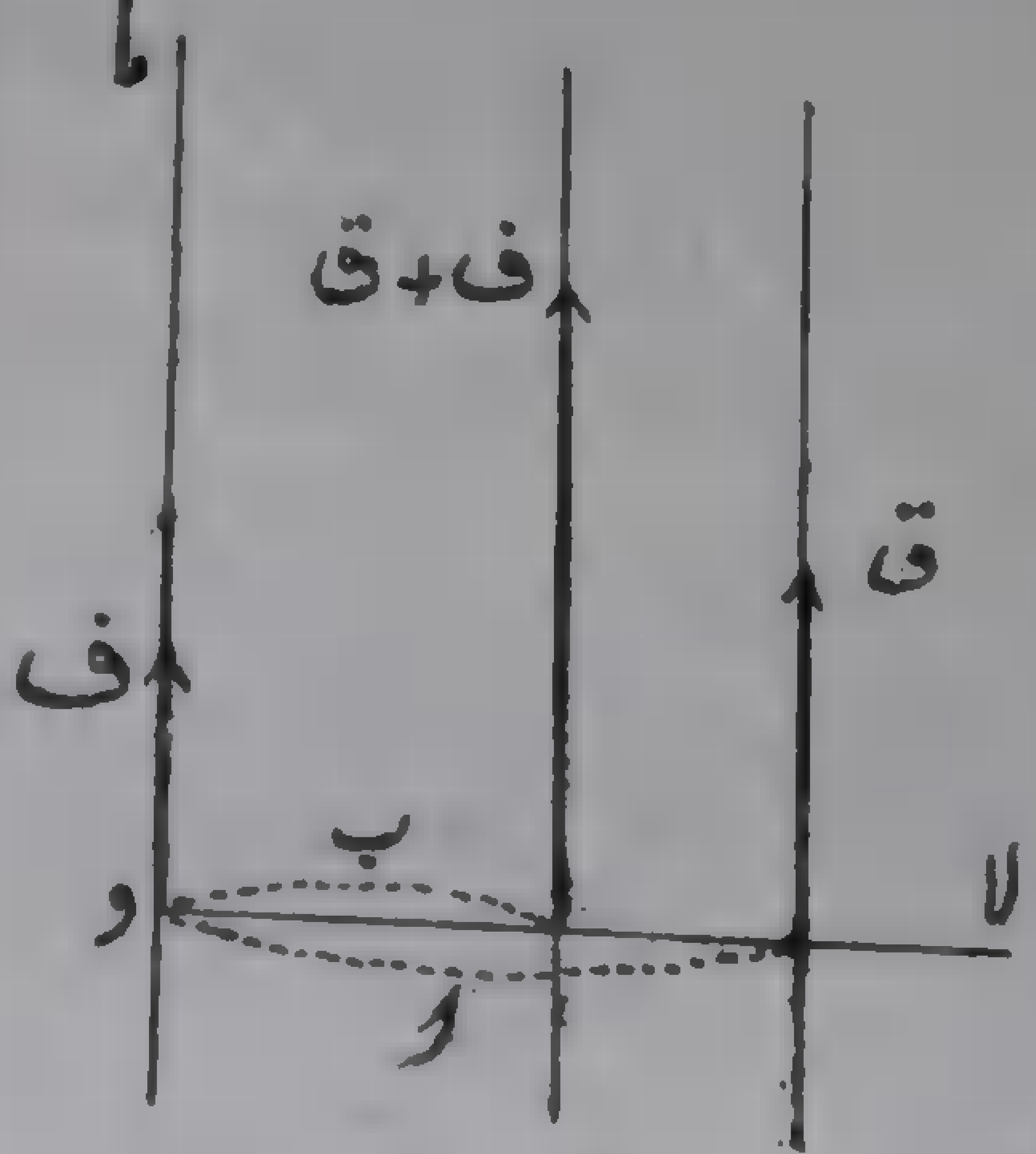
اس لیے حاصل قوت کی مقدار ف + ق ہے اور وہ و ما کے متوازی عمل کرتی ہے
(۱۰۰) فرض کرو کہ اِس کا فاصلہ و ما سے ب ہے اور ق کا فاصلہ ا سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب و کے گرد معیار لینے سے حاصل ہوتا ہے

(ف + ق) ب = ق ا

اِس لئے

$$\frac{ب}{ق} = \frac{ا}{ف + ق} = \frac{ا - ب}{ف}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط عمل، ف اور ق کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے۔ اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ



شکل (۵۳)

دو متوازی قوتوں ف، ق کا حاصل، اِن قوتوں کے متوازی، مقدار ف + ق کی ایک قوت ہے جس کا خط عمل، قوتوں ف اور ق کے خطوط عمل کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے

۷۵ ۔ متوازی قوتوں کا دوسرا ثبوت ۔ دفعہ (۶۸) سے ہم راست ثابت کر سکتے ہیں کہ متوازی قوتیں ف، ق اور قوت ۔ (ف + ق) جو قوتوں ف، ق کے متوازی ہے اور ایک ایسے خط پر عمل کرتی ہے جو اِن قوتوں کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے توازن میں ہیں۔

ف، ق کے خطوط عمل پر دو نقطے ا، ب لو اور کوئی تیسرا نقطہ ج لو جو خط ا ب پر نہ ہو۔ تب وہ جسم جس پر قوتیں ف، ق اور ۔ (ف + ق) عمل کرتی ہیں حسب ذیل مزید قوتوں کے عمل سے توازن میں رکھا جا سکتا ہے:

(ا) ایک قوت $م_ج$ جو ج پر عمل کرے اور ا ب ج پر عمود ہو،

(ب) ایک قوت $م_ب$ جو ب پر عمل کرے اور ا ب پر عمود ہو،

(ج) ایک قوت $م_ا$ جو ا پر عمل کرے۔

اس طرح قوتوں

ف، ق، - (ف + ق)، ماج، ماب، ما ا

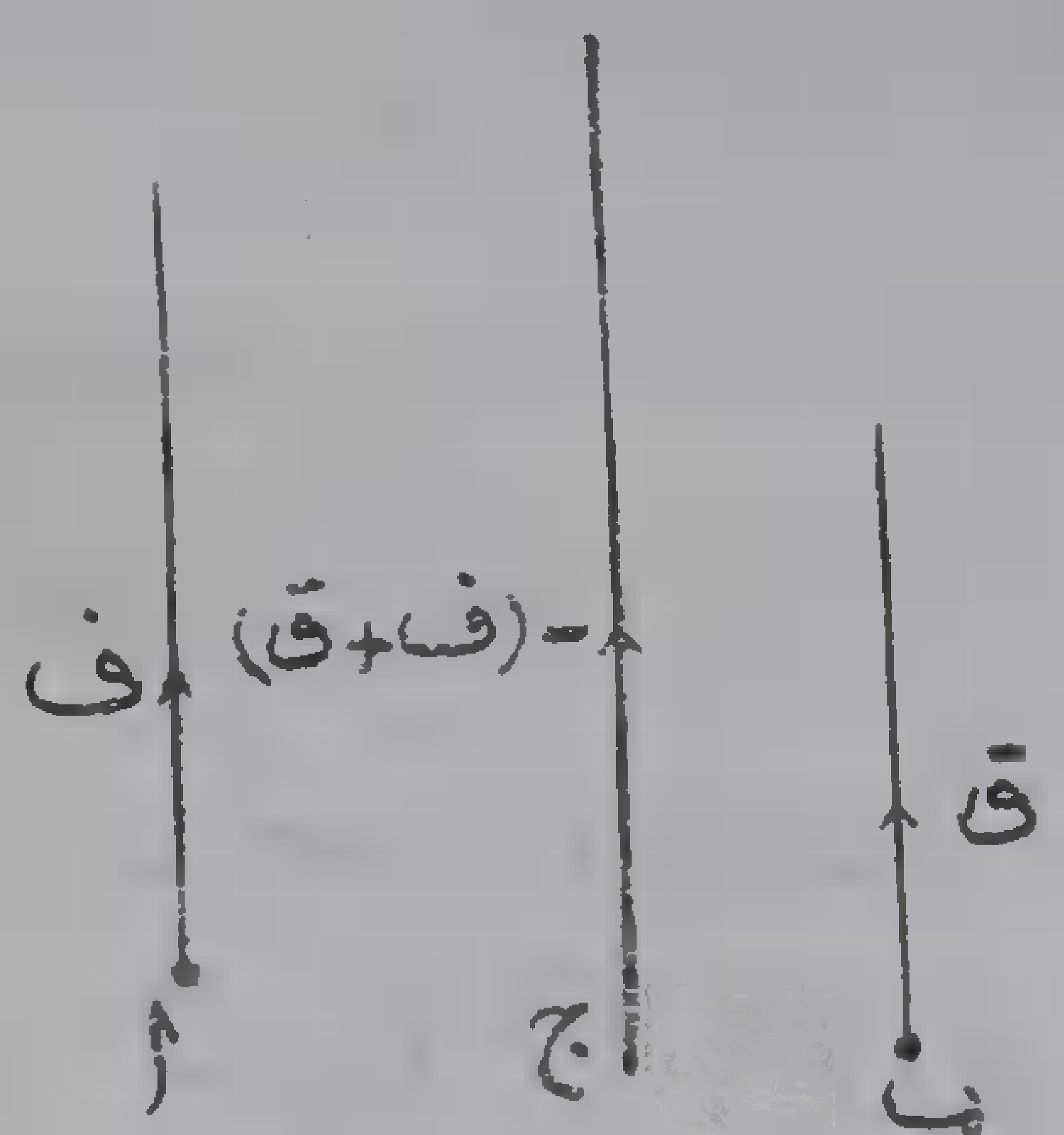
کا نظام توازن میں ہوگا۔

خط اب کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ ماج = ۰ اور ا کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ ماب = ۰ اور اگر ایسا نہیں ہے تو وہ خط ب ا پر عمل کرتی ہے اور ایسی صورت میں وہ ما ا میں ضم کی جا سکتی ہے۔ قوتوں ف، ق کے مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ ما ا کا کوئی جزو ترکیبی مستوی کے عمود وار نہیں ہو سکتا۔ اِس لئے چار باقی قوتیں

ف، ق، - (ف + ق)، ما ا

سب کی سب ایک مستوی میں ہیں۔

(۱۰۱) پھر ف کے خط عمل کے متوازی اور عمود وار تحلیل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ما ا کے دونوں اجزائے ترکیبی معدوم ہوتے ہیں اور اس لئے ما ا = ۰۔ اِس لیے ابتدائی قوتیں توازن میں ہیں۔



شکل (۵۴)

۷۶ — قوتوں کو مرکب کرنے کے اِن طریقوں کی صریحًا توسیع ہو سکتی ہے اور اِس لیے متوازی قوتوں کی کسی تعداد کو ایک واحد حاصل قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے۔ ہم حاصل کو اُلٹانے اور تحلیل کرنے سے دیکھتے ہیں کہ حاصل، ابتدائی قوتوں کے خطوط عمل کے متوازی ہے اور اِس کی مقدار اِن قوتوں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے۔

یہ نتیجہ اجسام کے اوزان کے سلسلہ میں اہمیت رکھتا ہے۔ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی اُستوار جسم پر جاذبہ ارض کے اثر کو یعنی اُن منفرد ذروں کے اوزان کے حاصل کو جن سے جسم بنا ہے

ایک واحد قوت سمجھا جا سکتا ہے جو ایک واحد خط پر انتصاباً عمل کرتی ہے۔ آئندہ باب میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ اُستوار جسم خواہ کسی محل میں ہو یہ خط ہمیشہ ایک معیّن نقطے میں سے گذرتا ہے جو جسم کے لحاظ سے ثابت ہوتا ہے، اِس نقطہ کو مرکزِ ثقل کہتے ہیں۔

۷۷۔ اِس کو تسلیم کئے بغیر متعدد سادہ صورتوں میں ہم خطِ عمل معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک ایکساں ڈنڈے پر بحث کر رہے ہیں۔ دو مساوی ذروں کے اوزان جو ڈنڈے کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوں ایک واحد قوت میں مرکب کئے جا سکتے ہیں جو ڈنڈے کے مرکز میں سے عمل کرتی ہے۔ تمام ذروں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کرنے پر ہم دیکھیں گے کہ ایک ایکساں ڈنڈے کا وزن اس کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔

اس طرح ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک دائری قرص، ایک دائری حلقہ یا کُرہ کا وزن اِس کے مرکز پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔ ایک متوازی السطوح یا مکعب کا وزن اِس کے وتروں کے نقطہ تقاطع پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے اور علیٰ ہذا۔

جفت

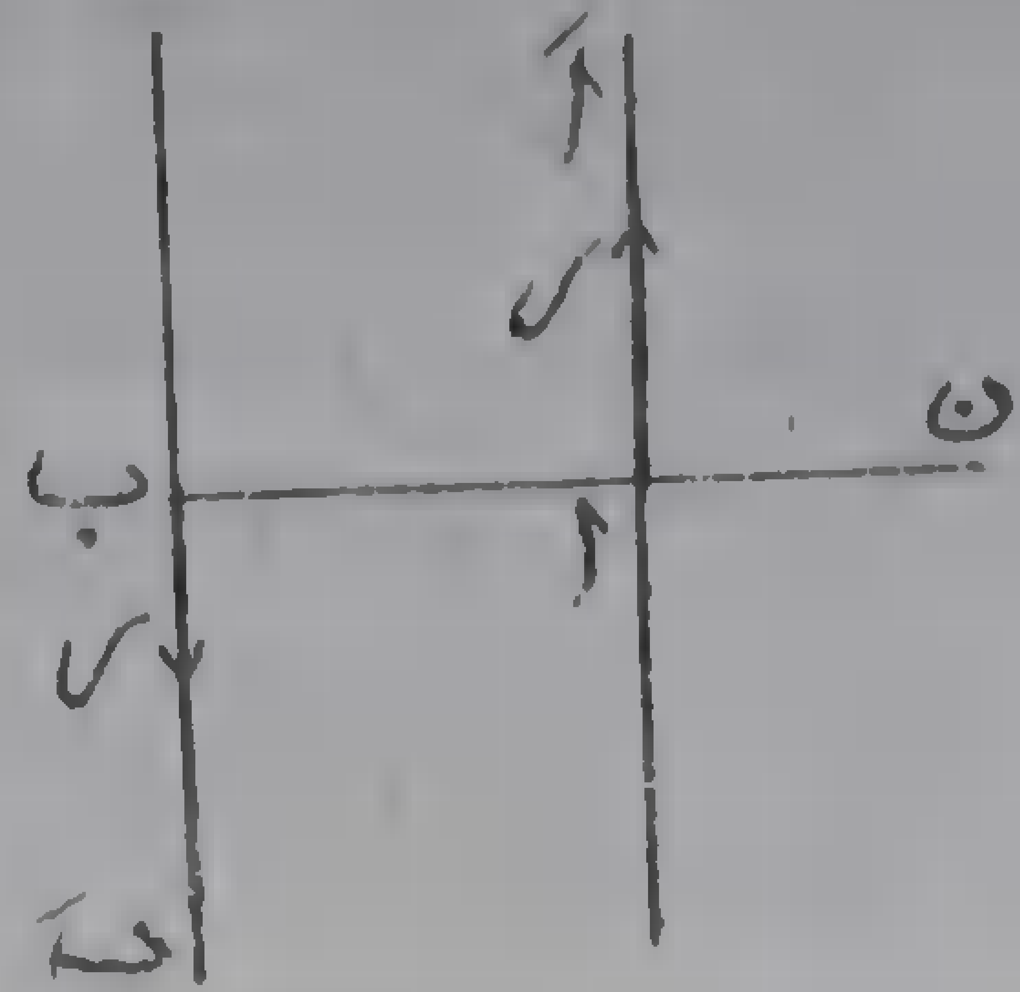
۷۸۔ اگر ہم دو متوازی قوتوں کو جو مقدار میں مساوی مگر علامت میں مختلف ہوں مرکب کرنے کی کوشش کریں تو ہمیں حاصل کے طور پر ایک ایسی قوت ملے گی جو مقدار میں صفر ہوگی اور اس کا خطِ عمل لاتناہی پر ہوگا۔ اگرچہ ایسی کسی قوت کی مقدار صفر ہوتی ہے لیکن اِس کے اثر کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا کیونکہ اس کا معیار معدوم نہیں ہوتا اِس وجہ سے کہ وہ ترکیبی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر شکل ۵۵ میں دو متوازی (۱۰۲)
مخالف قوتوں کے خطوطِ عمل ا اَ، ب بَ ہوں اور ہر قوت ر کے مساوی ہو اور اگر ان کی سمت کے علی القوائم ایک خط ن ا ب ہو تو

ن میں سے گذرنے والے اور قوتوں کے مُستوی کے علی القوائم خط کے گرد اِن کے معیاروں کا مجموعہ

= ک × ن ب - ک × ن ا

= ک ف

جہاں قوتوں کے خطوط عمل کا درمیانی فاصلہ ف ہے۔ قوتوں کا ایسا زوج جو مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہو اور ایک ہی خط میں عمل نہ کرے جفت کہلاتا ہے اِن کا معیار کسی نقطہ ن کے گِرد جو اِن کے خطوطِ عمل کے مُستوی میں ہو نقطہ ن کے محل پر منحصر نہیں ہوتا اور اِس کو جفت کا معیار کہا جاتا ہے۔



شکل (۵۵)

توازن کی شرط

۷۹ ـ چونکہ ہم مُستوی قوتوں کے کسی نظام کا حاصل یا تو ایک واحد قوت ہو سکتا ہے یا ایک جفت اس لئے وہ شرط کہ حاصل صفر کے مساوی ہو یہ ہوگی کہ حاصل واحد قوت صفر ہو اور کوئی جفت عمل نہ کرے۔ حاصل قوت کا جزو ترکیبی کسی سمت میں معدوم ہوتا ہے اگر اِس سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو۔ اس لئے حاصل قوت کے معدوم ہونیکے لیے یہ ضروری ہے کہ دو مختلف سمتوں میں اجزائے تحلیلی معدوم ہوں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے تو کوئی حاصل نہیں ہو سکتا اِلّا جفت کے اور چونکہ جفت کا معیار وہی ہوتا ہے خواہ اُسے کسی نقطہ کے گِرد لیا جائے اس لئے کوئی جفت نہیں ہو سکتا اگر کسی ایک نقطے کے گِرد معیار صفر ہو۔ پس ہم مُستوی قوتوں کے کسی نظام کے توازن کی ضروری اور کافی شرط حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

ہم مستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر دو سمتوں میں قوتوں کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ منفرداً معدوم ہو اور اگر کسی نقطے کے گرد معیاروں کا مجموعہ بھی معدوم ہو۔

(۱۰۳) ہم توازن کی اِس شرط کو ایک مختلف شکل میں بیان کرسکتے ہیں:

ہم مُستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر کسی تین نقطوں کے گرد جو ایک ہی خط میں نہ ہوں معیاروں کے مجموعے جدا جدا صفر ہوں۔

کیونکہ اگر کسی ایک نقطہ کے گرد معیار صفر ہو تو حاصل، جفت نہیں ہو سکتا۔ اِس لیے وہ ایک واحد قوت ہونا چاہیئے۔ اگر دو نقطوں اَ، بَ میں سے ہر ایک کے گرد معیار معدوم ہوں تو اس قوت کا خط عمل بالعموم اَ بَ ہونا چاہیئے لیکن اگر کسی تیسرے نقطہ جَ کے گرد بھی جو اَ بَ میں نہیں ہے معیار معدوم ہو تو خود قوت کو معدوم ہونا چاہیئے۔

مثالیں

۱۔ ۲ فٹ طویل خط کے دو سروں پر اور وسطی نقطہ پر علی الترتیب ۵، ۱۲، ۷ پونڈ کی متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ اِن کے حاصل کی مقدار اور خط عمل معلوم کرو۔

۲۔ مثال ماسبق کی قوتوں کا حاصل معلوم کرو جبکہ اِن کی مقداریں ۵، ۔۱۲، اور ۷ پونڈ ہوں۔

۳۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار تین قوتیں جن میں سے ہر ایک کی مقدار ف ہے عمل کرتی ہیں۔ حاصل معلوم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا ایک نظام جو ایک مستوی کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار عمل کرتی ہیں اور اِن ضلعوں سے تعبیر ہوتی ہیں ایک جفت کے مماثل ہے جس کا معیار کثیر الاضلاع کے رقبے کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے۔

۵۔ اگر تین نقطوں کے گرد جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں کوئی ہم مستوی قوتوں کے معیاروں کے مجموعے مساوی ہوں اور الگ الگ صفر نہ ہوں تو

ثابت کرو کہ یہ نظام ایک جفت کے مماثل ہے۔

۶ — ایک ایکساں ڈنڈے کا طول ۳ فٹ اور وزن ۲۴ پونڈ ہے۔ ۱۶ اور ۱۸ پونڈ کے وزن اس کے دو سروں پر پیوست کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈنڈے کو کس نقطہ پر سہارنا چاہیئے کہ وہ عین متوازن ہو۔

۷ — ۲۰ پونڈ وزن کا ایک ایکساں شہتیر اپنے دو سروں سے لٹکایا گیا ہے اور ۵۰ پونڈ کا ایک وزن اس کے ایک ایسے نقطہ سے لٹکتا ہے جس کے فاصلے سروں سے ۷ فٹ اور ۳ فٹ ہیں۔ ان نقطوں پر دباؤ معلوم کرو جن سے شہتیر لٹکا ہوا ہے۔

۸ — ۵۰ پونڈ وزن اور ۱۸ فٹ طول کے ایک یکساں ڈنڈے کو دو آدمی اپنے شانوں پر لئے جا رہے ہیں وہ ڈنڈے کے سروں سے علی الترتیب ۲ فٹ اور ۳ فٹ کے فاصلوں پر چلتے ہیں۔ ۵۰ پونڈ کا ایک وزن شہتیر کے وسطی نقطے سے لٹکا دیا گیا ہے۔ وہ کل وزن معلوم کرو جو ہر شخص لیے جا رہا ہے۔

۹ — ایک گھنٹی جس کا وزن ۳۲ پونڈ ہے دو مساوی کُروں سے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ۳ انچ ہے اور جو لوہے کی ایک سلاخ سے جڑے ہوئے ہیں بنائی گئی ہے کُروں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ۱۶ انچ ہے ایک کرہ کو اب جدا کر لیا جائے تو گھنٹی کے مابقی حصہ کا وزن ۲۰ پونڈ معلوم ہوتا ہے اس حصہ کو کہاں سہارنا چاہیئے کہ وہ عین متوازن ہو سکے۔

متوازی مستویوں میں جفت

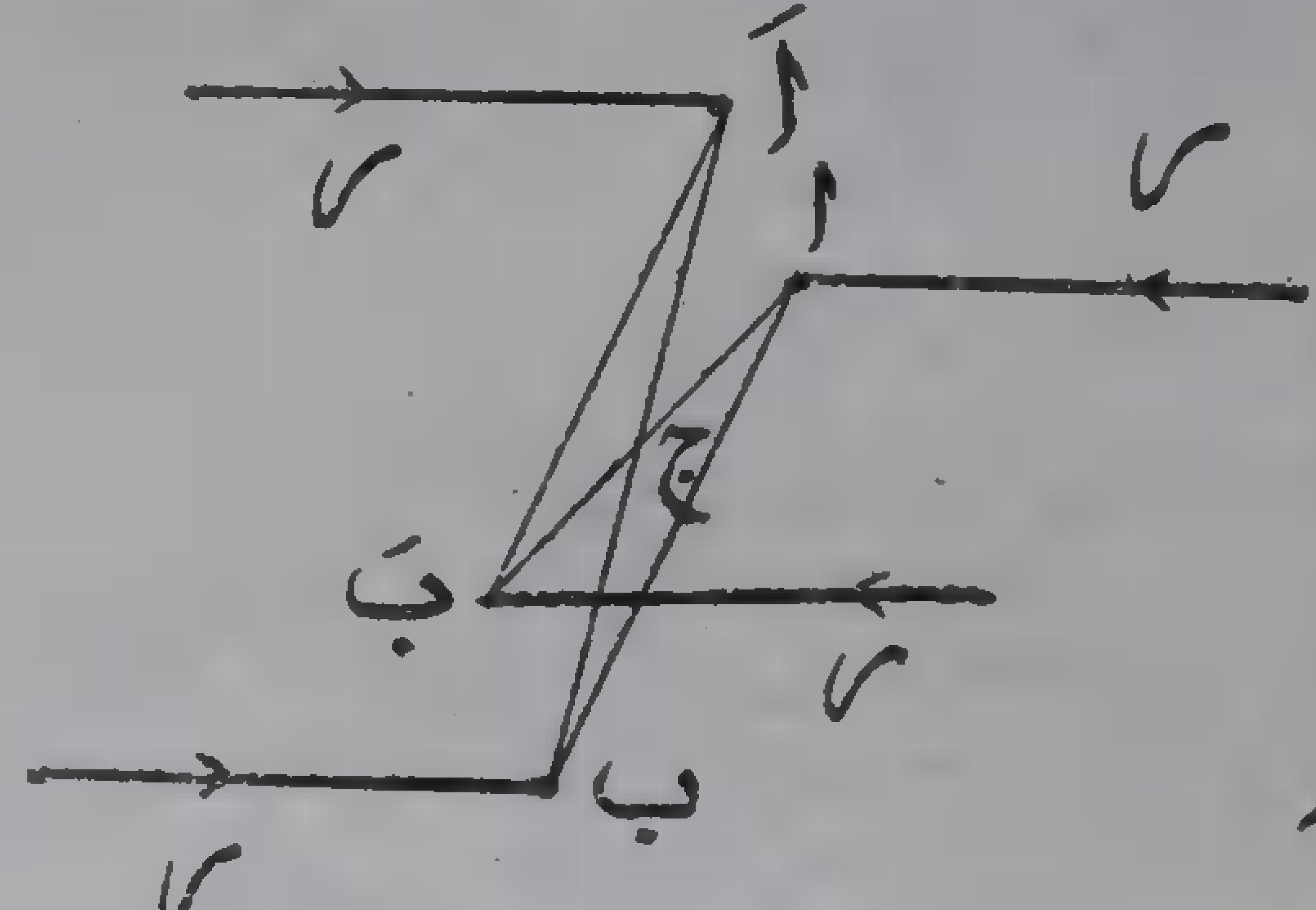
۸۰ — دفعہ (۷۹) کے نتیجہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دو جفت جو ایک ہی مستوی میں عمل کریں ایک ہی اثر پیدا کرتے ہیں اگر ان کے معیار مساوی ہوں کیونکہ ان میں سے ایک کو الٹانے سے توازن کی تمام شرطیں پوری ہو سکتی ہیں۔

اس طرح ہم ایک جفت کا اثر صرف اس کا معیار معلوم کر کے متعین کر سکتے ہیں۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ وہ حقیقی مستوی جس میں

جفت عمل کرتا ہے کوئی اہمیت نہیں رکھتا، صرف اس کی سمت اہم ہے دوسرے الفاظ میں:

مساوی معیاروں کے جفت جو متوازی مستویوں میں عمل کریں وہی اثر پیدا کرتے ہیں۔

اِس کو ثابت کرنے کے لیے ہم ایک جفت کو اُلٹاتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں کہ اب یہ دو جفت توازن میں ہیں۔ فرض کرو کہ پہلا جفت دو قوتوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک ر کے مساوی ہے اور فرض کرو کہ اِن کے خطوطِ عمل کا ایک مشترک عمود ثانی الذکر سے نقطوں ا، ب پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ دوسرے جفت کے مستوی میں اَ بَ ایک خط ہے جو ا ب کے مساوی اور متوازی ہے اور فرض کرو کہ دوسرے جفت کو اُلٹانے کے بعد وہ دو قوتوں ر، ر سے تعبیر ہوتا ہے جو اَ بَ پر عمل کرتی ہیں۔ ہم اِس جفت کو یہ سمجھ سکتے ہیں کہ وہ اُلٹائے ہوئے دوسرے جفت کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اِس کا معیار دوسرے جفت کے معیار کے مساوی اور مخالف ہے اور وہ اُسی مستوی میں ہے جس میں دوسرا جفت ہے۔



شکل (۵۶)

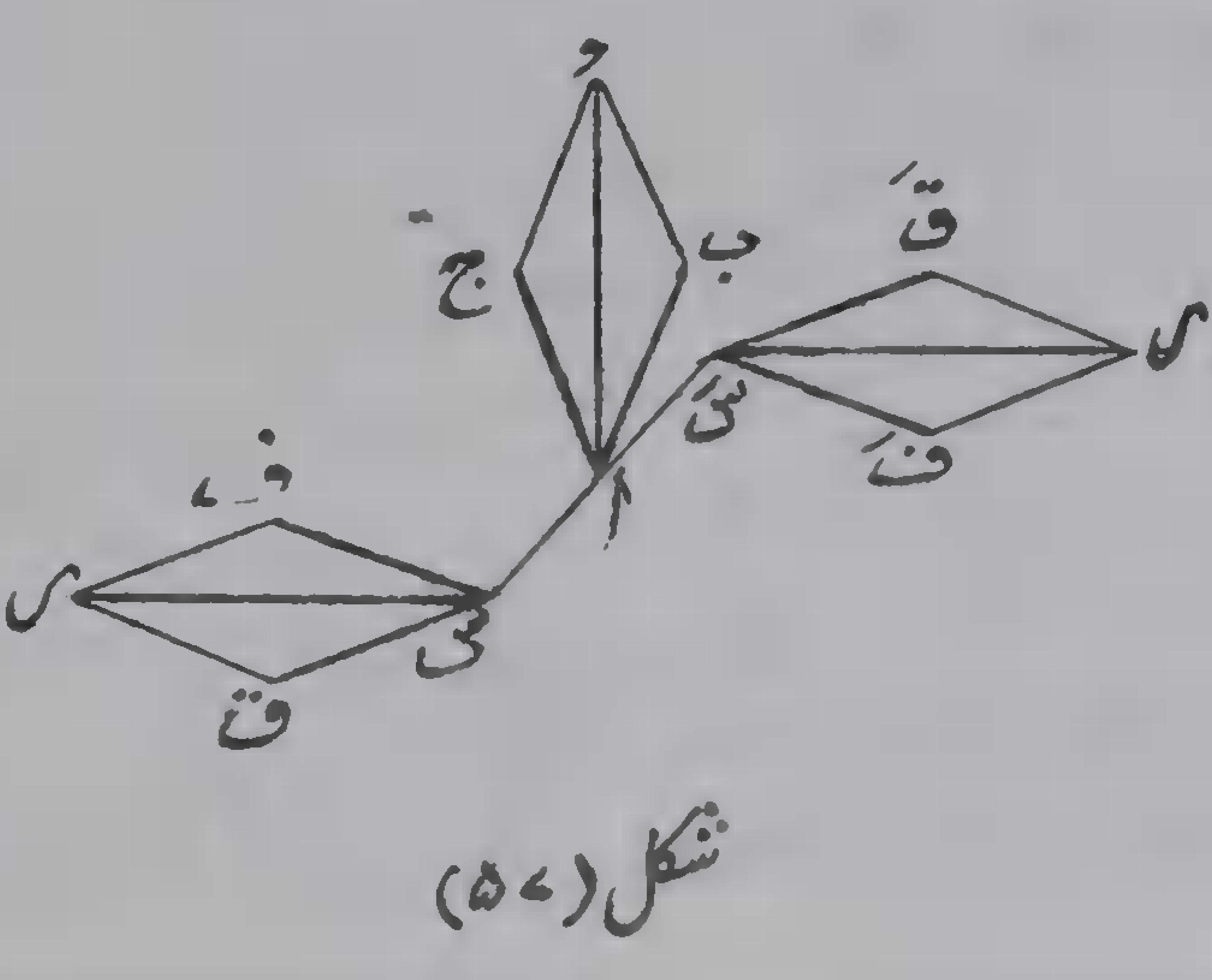
اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ چار قوتیں جن میں سے ہر ایک ر کے مساوی ہے اور جو علی الترتیب ا ب، اَ بَ پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہیں۔ بموجب عمل ا ب بَ اَ ایک متوازی الاضلاع ہے اِس لیے ج جو اِس کے وتروں کا نقطہ تقاطع ہے ہر ایک وتر کا

نقطہ وسطی بھی ہے۔
دو متوازی قوتیں ں، ں جو علی الترتیب ا، ب پر عمل کرتی ہیں
ایک واحد قوت ۲ ں میں جو ا ب کے وسطی نقطہ ج پر عمل کرتی ہے
مرکب کیجا سکتی ہیں اور اسی طرح دو قوتیں ں، ں جو ب، ا پر عمل کرتی ہیں
ایک قوت ۲ ں میں جو ا ب کے وسطی نقطہ ج پر عمل کرتی ہے مرکب (۱۰۵)
کیجا سکتی ہیں۔ یہ دو قوتیں ۲ ں، ۲ ں مساوی ہیں اور ایک ہی نقطہ ج پر
مخالف سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ اِس لیئے توازن ہے اور یہ ثابت
ہوتا ہے کہ دو جفت مماثل ہوتے ہیں اگر اِن کے معیار مساوی ہوں
اور اگر وہ مستوی جن میں وہ عمل کرتے ہیں متوازی ہوں۔

۸۱ — وہ سمت جو اُس مستوی پر عمود ہو جس میں ایک جفت عمل کرتا ہے
اُس جفت کا محور کہلاتی ہے چنانچہ دو جفت جن کا محور ایک ہی ہو اور جن کے
معیار مساوی ہوں مماثل ہوتے ہیں۔

جفتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کرنا

۸۲ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی جفت ایک مقدار (اُس کا معیار) اور
ایک سمت (اُس کا محور) سے متعین ہو جاتا ہے۔ اس لیے اُس کو ایک



شکل (۵۷)

خطِ مستقیم سے پوری طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے، اس خط کی سمت محور کی سمت ہوگی اور اس کا طول جفت کے معیار کی مقدار کو کسی پیمانے پر تعبیر کرے گا۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ جفت قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کئے جاسکتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر دو جفت مقدار اور سمت میں دو خطوں اب، اج سے تعبیر ہوں تو اِن کا حاصل ایک جفت ہوگا جو مقدار اور سمت میں اد سے تعبیر ہوگا جہاں اد اُس متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے اب، اج ہیں۔

فرض کرو کہ اب، اج دو خط ہیں جو اپنی سمت اور مقدار سے دو جفتوں کے محوروں اور معیاروں کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ س ا سَ ایک خط ہے جو مستوی اب ج پر عمود ہے جہاں ا اِس خط کا وسطی نقطہ ہے۔ س اور سَ میں سے مستوی اب ج کے متوازی مستویاں کھینچو اور یہ فرض کرو کہ جفت اب کی بجائے اِن دو مستویوں میں قوتیں ف س، فَ سَ ہیں جہاں خطوط ف س، فَ سَ (۱۰۶)
دونوں اب پر عمود ہیں۔ اسی طرح فرض کرو کہ جفت اج کی بجائے اُن ہی دو مستویوں میں قوتیں ق س اور قَ سَ ہیں۔

اب اِن دو جفتوں کی بجائے چار قوتیں ف س، ق س، فَ سَ، قَ سَ ہیں۔

متوازی الاضلاعوں ف س ق ر، اب اج د، فَ سَ قَ رَ کی تکمیل کرو۔ صریحاً یہ متوازی الاضلاع سب کے سب ایک دوسرے کے مشابہ ہیں اور پہلے اور دوسرے متوازی الاضلاعوں کے

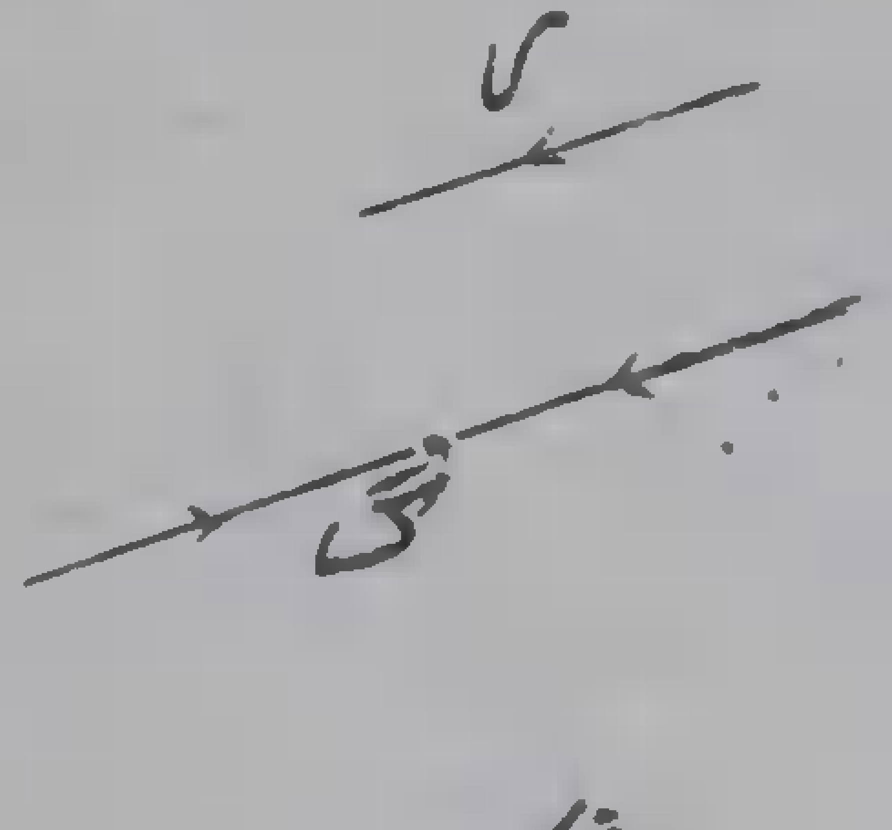
نظیری خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ اس طرح اُس جفت کی بجائے جو ا د سے تعبیر ہوتا ہے دو قوتیں ں ا س، ں ا سَ رکھی جا سکتی ہیں۔ لیکن یہ دو قوتیں اِن چار قوتوں ف س، ق س، ف سَ، ق سَ کے ٹھیک مماثل ہیں جن میں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جفت ا ب، ا ج تحویل ہو سکتے ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

قوتیں فضا میں

۸۳ ۔ جب ایک جسم پر عمل کرنے والی قوتیں سب کی سب ایک مُستوی میں نہ ہوں تو اِن کا حاصل بالعموم ایک واحد قوت نہیں ہوگا۔

مسئلہ۔ ایک اُستوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں جہاں قوت ایک اختیاری طور پر منتخبہ نقطہ پر عمل کرے۔

فرض کرو کہ گ منتخبہ نقطہ ہے اور ں کوئی قوت ہے جس کا خطِ عمل گ میں سے نہیں گذرتا۔ گ پر دو مساوی اور مخالف قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ں کے مساوی اور اس کے خطِ عمل کے متوازی ہو۔ ان میں سے ایک قوت کو ابتدائی قوت ں کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک جفت حاصل ہوتا ہے، اس لیے ابتدائی قوت ں کی بجائے ایک قوت (جو ابتدائی قوت کے مساوی اور متوازی ہے لیکن نقطہ گ پر عمل کرتی ہے) اور ایک



شکل (۵۸)

جفت رکھے جا سکتے ہیں۔
نظام کی تمام قوتوں کے ساتھ یہی عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے
(ا) قوتوں کی ایک تعداد جو منتخبہ نقطہ گ پر عمل کرتی ہیں،
اور (ب) جفتوں کی ایک تعداد
رکھی جا سکتی ہے۔
گ پر عمل کرنے والی قوتوں کو گ پر کی ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے اور جفتوں کو ایک واحد جفت میں مرکب کیا جا سکتا ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۸۴۔ مسئلہ۔ ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں جہاں جفت کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہو۔ (۱۰۷)

دفعہ ۸۳ کے مسئلہ سے اِس نظام کی بجائے ایک قوت (جو کسی نقطہ و پر عمل کرے) اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ اِس قوت کی مقدار ر ہے اور اِس کا خط عمل و ف ہے۔ فرض کرو کہ جفت کا معیار گ ہے اور اِس کا محور و ق ہے۔ اگر زاویہ ف و ق کو ط سے تعبیر کیا جائے تو ہم اِس جفت کو دو جفتوں میں تحلیل کر سکتے ہیں،
(ا) معیار گ جم ط کا ایک جفت جس کا محور و ف ہے،
اور (ب) معیار گ جب ط کا ایک جفت جس کا محور و ف پر عمود ہے۔
اِن میں سے دوسرے جفت کی بجائے کوئی دو قوتیں رکھی جا سکتی ہیں بشرطیکہ وہ ایسی منتخب کی جائیں کہ وہ اِس جفت کے مماثل ہوں۔ فرض کرو کہ اِن میں سے ایک قوت۔ ر ہے جو و ف پر عمل کرتی ہے یعنے یہ وہ قوت ہے جو اُس قوت ر کی جو پہلے ہی سے و ف پر عمل کرتی ہے تعدیل کرتی ہے۔ جفت کی دوسری قوت وہ قوت ر ہونی چاہیئے جو و ف کے

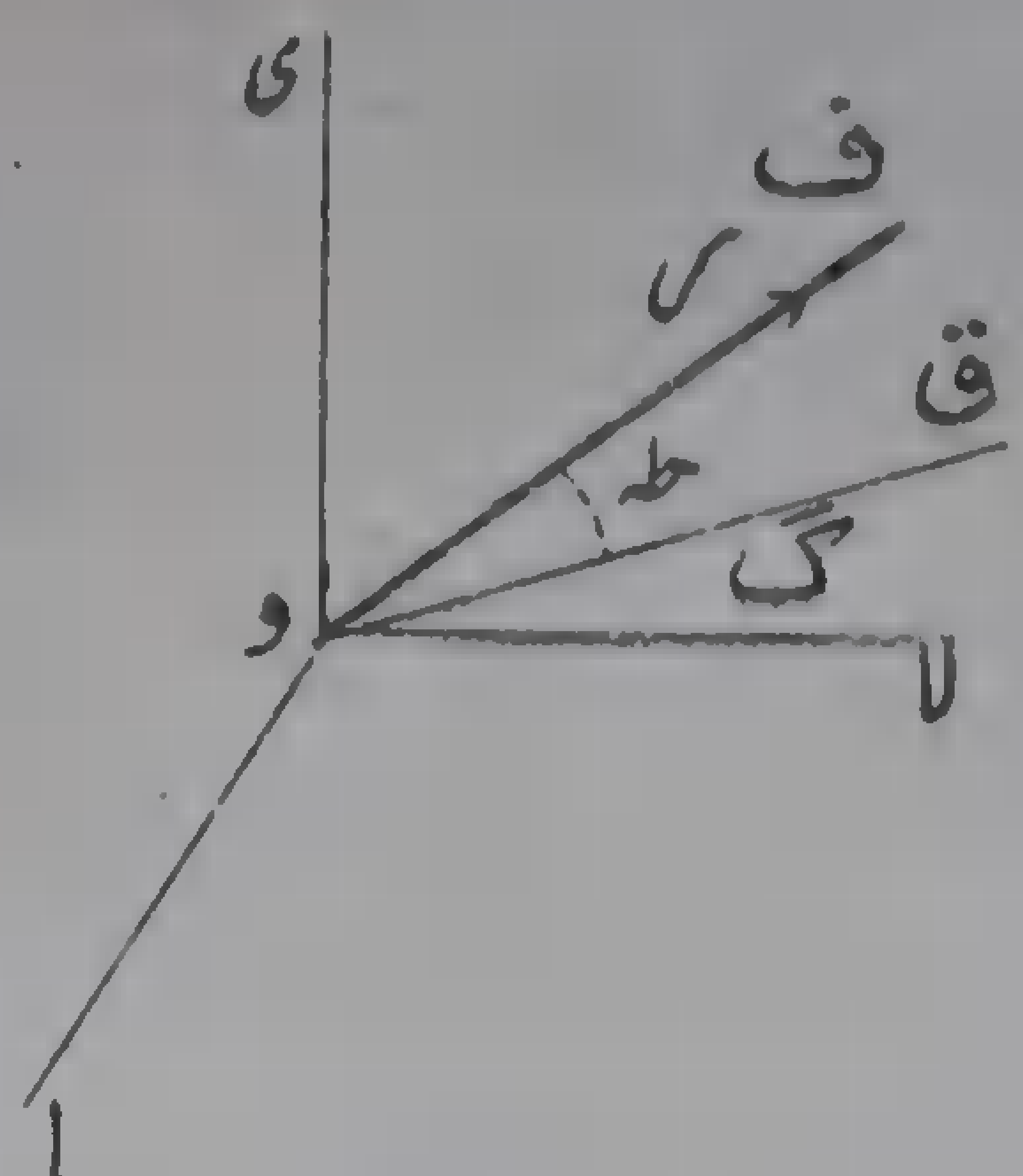
متوازی خط پر اس سے ایک ایسے فاصلہ پر عمل کرے جو (گ جب طہ)/س کے مساوی ہے

قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے اب حسب ذیل قوتیں اور جفت ہیں:

(ا) قوتیں + س ، - س جو و ف پر عمل کرتی ہیں

(ب) قوت س جو و ف کے متوازی ہے

(ج) جفت گ جم طہ جس کا محور و ف کے متوازی ہے۔



شکل (۵۹)

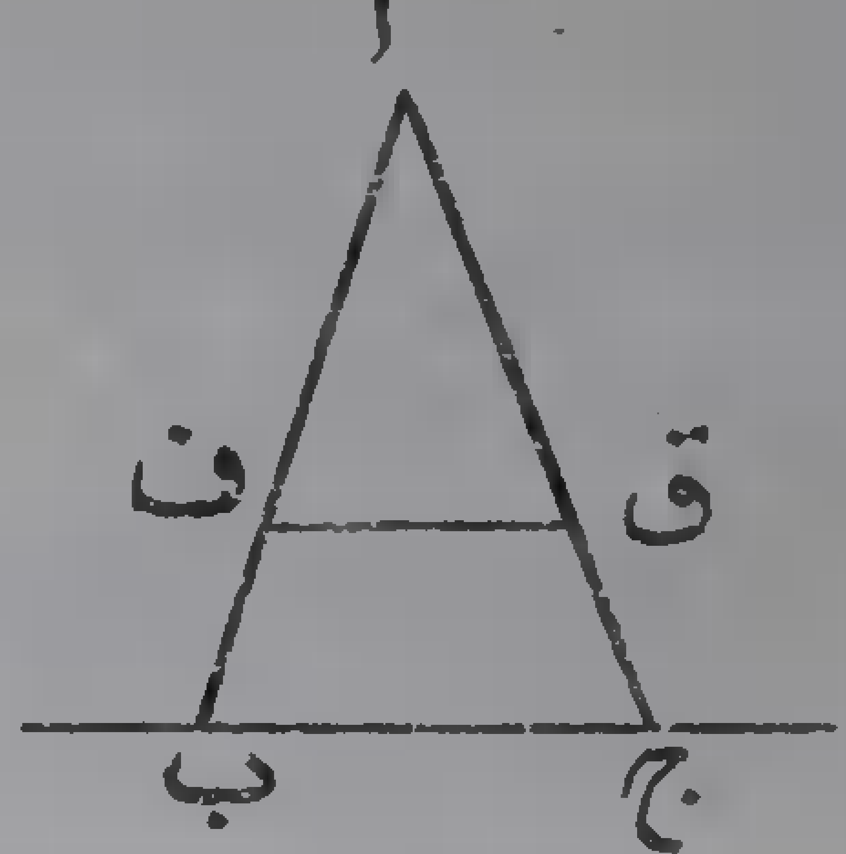
دو قوتیں (ا) ایک دوسرے کی تعدیل کرتی ہیں اور اس لیے صرف ایک قوت س اور ایک جفت گ جم طہ رہ جاتا ہے جس کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہے۔ اِس سے مسئلہ ثابت ہے۔

قوت کے اِس خط عمل کو جو اب جفت کا محور بھی ہے قوتوں کے نظام کا مرکزی محور کہتے ہیں۔ قوتوں کا کوئی نظام سب سے زیادہ سادہ طریقہ پر مشخص ہو جاتا ہے اگر قوت اور جفت کی مقدار اور مرکزی محور کا محل اور سمت معلوم ہوں۔ ایسے کسی نظام کو رینچ (Wrench) کہتے ہیں۔

توضیحی مثالیں (۱۰۸)

۱۔ دو مساوی یکساں تختے قبضے کے ذریعہ ایک سرے پر جوڑے گئے ہیں اور وہ اس طرح کھڑے ہیں کہ اِن کے آزاد سرے ایک چکنے اُفقی مستوی پر ٹکے ہوئے ہیں اور انہیں پھسلنے سے ایک رسی کے ذریعہ روکا گیا ہے جو ہر تختے سے ایک ہی ارتفاع پر بندھی ہے۔ اِس رسی کا تناؤ اور قبضے پر عمل معلوم کرو۔

شکل میں فرض کرو کہ اب، اج دو تختے ہیں جو ا پر قبضے سے جوڑے گئے ہیں اور فرض کرو کہ ف ق رسی ہے۔ تختہ اب پر جو عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:



شکل (۶۰)

(ا) قبضہ ا پر کا عمل،

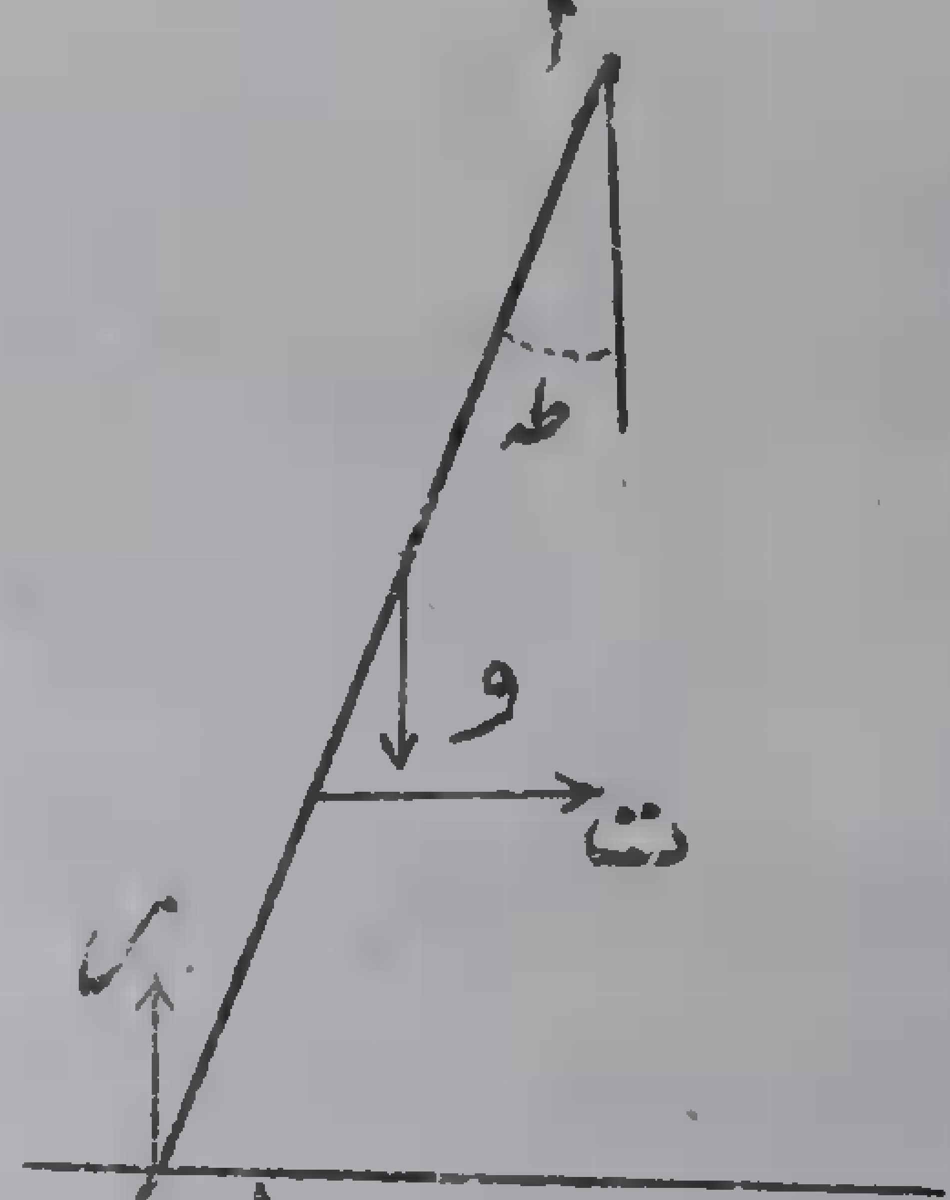
(ب) رسی کا تناؤ جو ف ق پر عمل کرتا ہے،

(ج) پائین ب پر کا تعامل،

(د) وزن۔

اِن چار قوتوں میں سے (ا) اور (ب) وہ قوتیں ہیں جن کو معلوم کرنا مطلوب ہے۔ قوت (ج) بھی فی الحال نامعلوم ہے۔ قوت (د) کو جیسا کہ دفعہ ۷۷ میں سمجھایا جا چکا ہے ایک واحد قوت و سمجھا جا سکتا ہے جو تختے کا کل وزن ہے اور چونکہ تختہ یکساں ہے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ قوت اس کے وسطی نقطے میں سے عمل کرتی ہے۔

قوت (ج) کو جو ب پر کا تعامل ہے معلوم کرنے کا ایک سادہ طریقہ ہے۔ چونکہ ب پر تماس چکنا ہے اِس تعامل کی سمت انتصاباً اوپر ہونی چاہئے۔ فرض کرو کہ اِس کی مقدار ر ہے۔



شکل (۶۱)

تشاکل کی بنا پر دوسرے تختے کے پائین ج پر ٹھیک متشابہ تعامل ہونا چاہئے۔ اب اِس پورے نظام کے توازن پر غور کرو جو دو تختوں اور رسی پر مشتمل ہے۔ اِس نظام پر جو بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں وہ صرف حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن

(ب) ب اور ج پر کے تعامل۔

اگر ہم انتصاباً تحلیل کریں تو

چونکہ نظام توازن میں ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

۲و − ۲ر = ۰

اس لیے ر = و، ہر تعامل ایک تختے کے وزن کے عین مساوی ہے جیساکہ ہمیں توقع ہونی چاہیئے تھی۔

تختہ اب پر عمل کرنے والی چار قوتوں میں سے آخری دو قوتیں اب معلوم ہیں اور پہلی دو معلوم کرنی ہیں۔ اگر ہم ا کے گرد معیار لیں تو قوتوں (ب)، (ج) اور (د) کے درمیان ایک مساوات ملے گی جس سے نامعلوم قوت (ب) یعنی تناؤ معلوم ہوگا۔

اگر ہم تناؤ کو ت سے تعبیر کریں اور زاویہ ب ا ج کو ۲ ط سے تو ا کے گرد معیار لینے سے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

ر × اب جب ط − و × ½ اب جب ط − ت × اف جم ط = ۰

اس لیے ت = (اب ⁄ ۲ اف) و س ط، کیونکہ ر = و

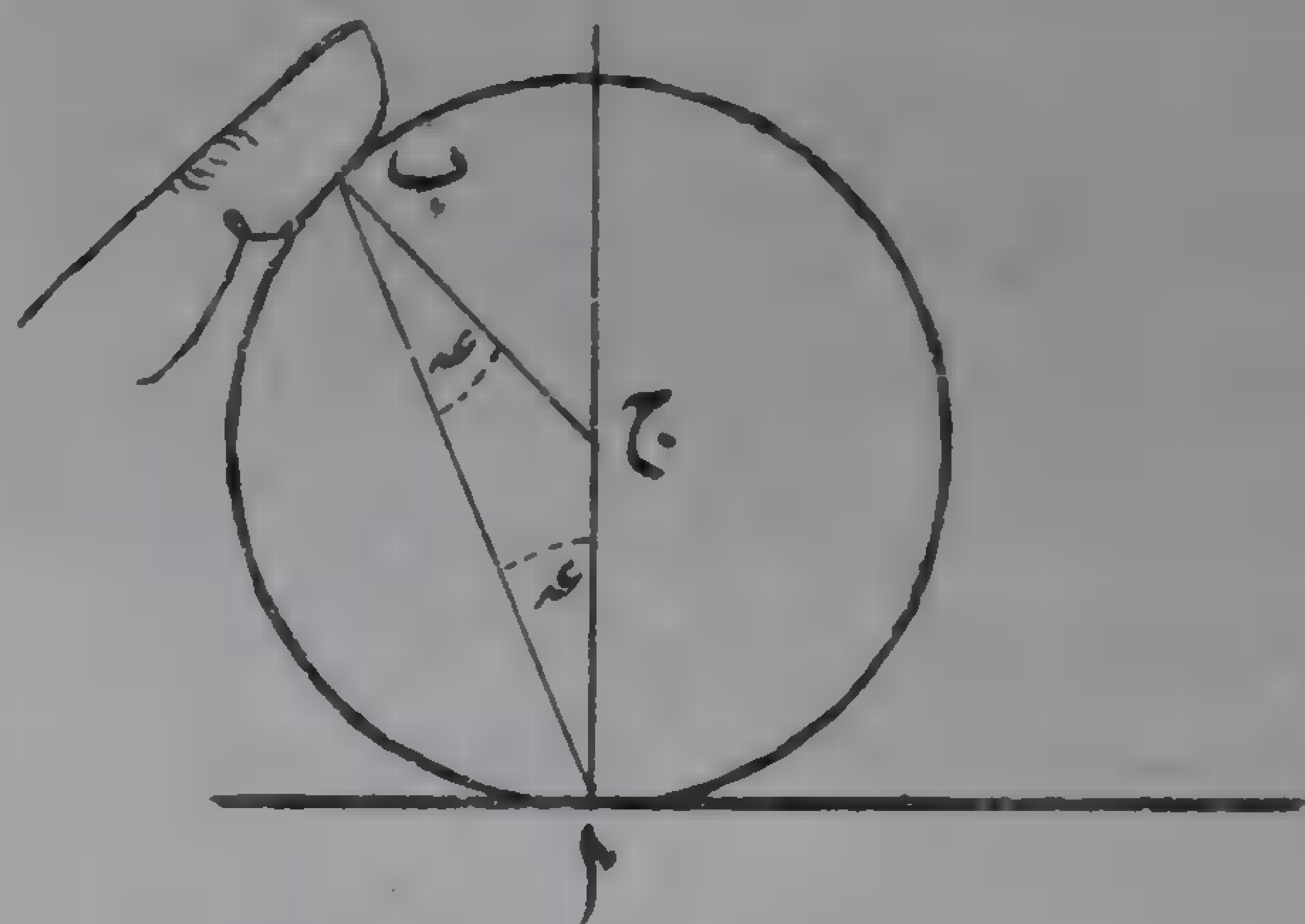
نیز افقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ ا پر کا عمل مقدار ت کی (۱۰۹)
ایک افقی قوت پر مشتمل ہونا چاہیئے جس کی سمت ت کی سمت کے مخالف ہو۔

۲۔ ایک حلقہ ایک میز پر کھڑا ہے اور اس کے ایک نقطے پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ ڈالا گیا ہے۔ دونوں تماسوں پر رگڑ کی قدریں معلوم ہیں۔ امتحان کرو کہ توازن اولاً کس طرح ٹوٹ جائے گا۔

فرض کرو کہ حلقہ اور میز کا نقطہ تماس ا ہے اور حلقہ اور انگلی کا نقطہ تماس ب۔ فرض کرو کہ ا اور ب پر رگڑ کے زاوئے صہ، صہ ہیں۔ فرض کرو کہ ب ا انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔

حلقے پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) تعاُمل نقطہ ا پر،
(ب) تعاُمل نقطہ ب پر،
(ج) حلقہ کا وزن



شکل (۶۲)

آخری قوت کو ایک واحد قوت و سمجھنے سے جو حلقہ کے انتصابی قطر ج ا پر عمل کرتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب تک حلقہ ساکن رہتا ہے وہ تین قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے۔

پس دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کے رُو سے اِن تین قوتوں کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

یہ معلوم ہے کہ وزن کا انتصابی خط ج ا ہے اور ا پر کے تعامل کا خطِ عمل ا میں سے گذرنا چاہئے۔ اِس لئے یاتو

(عہ) وہ نقطہ جس میں تین خطوط عمل ملتے ہیں ا ہونا چاہئے، یا

(بہ) ا پر کا تعامل ج ا پر عمل کرنا چاہئے، اِس لئے وہ نقطہ جسمیں تین خطوط عمل ملتے ہیں ج ا میں ا کے سوا کوئی دوسرا نقطہ ہوگا۔

یہ دوسری صورت فوراً خارج کی جاسکتی ہے کیونکہ اگر ا پر کا تعامل ج ا پر عمل کرتا ہے تو اُسکو اور وزن کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جاسکتا ہے اور اب

توازن اِس قوت اور ب پر کے تعامُل کے تحت ہونا چاہئیے ۔ اِس کے لیے ضروری ہے کہ ہر قوت معدوم ہو یعنے ب پر کوئی دباؤ نہو اور ا پر کا تعامُل حلقہ کے وزن کے عین برابر ہو ۔ اِس سے صریحاً توازن کی ایک حالت ملتی ہے یعنے حلقہ میز پر کھڑا ہے اور اِس پر صرف اِس کا وزن عمل کرتا ہے ـــــ لیکن توازن کی یہ حالت وہ نہیں ہے جس سے ہمیں اِس مثال میں واسطہ ہے ۔

اب ہم صورت (عہ) پر غور کریں گے ۔ اگر تین خطوطِ عمل ا پر ملتے ہیں تو ب پر کے تعامل کو ب ا پر عمل کرنا چاہئیے اور یہ بات درست ہونی چاہئیے خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی بڑا ہو ۔ پس ب پر کا تعامل عماد کے ساتھ ہمیشہ زاویہ عہ بنائیگا اگر عہ، ب پر کے رگڑ کے زاویہ صہ سے کم ہے تو تعامل کے لیے یہ ایک ممکن خطِ عمل ہوگا اور ب پر کوئی پھسلن واقع نہو سکے گی خواہ ب پر کتنا ہی بڑا دباؤ عمل کرے ۔

برخلاف ازیں اگر عہ، صہ سے بڑا ہے تو توازن ناممکن ہے خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی چھوٹا ہو ۔ اِس لیے اگر توازن ہے تو ب پر کا دباؤ معدوم ہونا چاہئیے اور اس طرح ہم توازن کی اُسی حالت پر پہنچتے ہیں جو صورت (بہ) میں حاصل ہوئی تھی ۔ جوں ہی ب پر کا دباؤ قابل قدر ہو جاتا ہے توازن، ب پر پھسلن واقع ہونے کی وجہ سے ٹوٹ جاتا ہے کیونکہ ب پر توازن برقرار رکھنے کے لیے تعامل کو ایسے زاویہ پر عمل کرنا پڑیگا جو رگڑ کے اصلی زاویہ سے بڑا ہو ۔ اس طرح حل دو مختلف صورتوں میں پیش ہوتا ہے :—



شکل (۶۳)

صورت (۱) اگر عہ، صہ سے بڑا ہے تو جوں ہی ب پر دباؤ ڈالا جاتا ہے حرکت واقع ہوتی ہے ۔ حلقہ، ب پر پھسلتا ہے اور اس لیے ا پر لڑھکتا ہے ۔

صورت (۲) اگر عہ، صہ سے کم ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ ب پر خواہ کتنا ہی بڑا دباؤ ڈالا جائے ب پر پھسلن واقع نہیں ہو سکتی۔ اب یہ امتحان کرنا باقی ہے کہ آیا ا پر پھسلن واقع ہو گی۔

اِس سوال کا تصفیہ کرنے کے لیے ہمیں یہ معلوم کرنا چاہئے کہ آیا ا پر کا تعامل انتصابی کے ساتھ ایک ایسے زاویہ پر عمل کرتا ہوا معلوم کیا جا سکتا ہے جو اتنا بڑا ہو جتنا ا پر رگڑ کا زاویہ ہے یعنے صہ۔ اب حلقہ پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں یعنے ا اور ب پر کے تعامل $ک_ا$، $ک_ب$ (فرض کرو) اور حلقہ کا وزن و۔ اِن قوتوں کے خطوط نقطہ ا پر ملتے ہیں اور لامی کے مسئلے سے ہم قوتوں کی مقداروں اور اِن کے درمیانی زاویوں کے درمیان رشتے معلوم کر سکتے ہیں۔

اِن تین قوتوں کے خطوط عمل شکل (۶۳) میں تعبیر کئے گئے ہیں۔ و اور $ک_ب$ کا درمیانی زاویہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں ہمیشہ عہ کے مساوی ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ $ک_ا$ اور انتصابی کے درمیان زاویہ طہ ہے، اب لامی کے مسئلے سے

$$\frac{ک_ا}{جب\ عہ} = \frac{ک_ب}{جب\ طہ} = \frac{و}{جب\ (عہ - طہ)}$$

$ک_ا$ کی قیمت معلوم نہیں ہے، لیکن آخری دو کسروں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{و}{ک_ب} = \frac{جب(عہ - طہ)}{جب\ طہ} = جب\ عہ\ مم\ طہ - جم\ عہ$$

$$اِس\ لیے \qquad مم\ طہ = \left(جم\ عہ + \frac{و}{ک_ب}\right) قم\ عہ \qquad (۱۱۱)$$

اِس مساوات سے ہم زاویہ طہ کی قیمت میں تبدیلیاں معلوم کر سکتے ہیں جبکہ $ک_ب$ کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے۔ چنانچہ جب $ک_ب$ = ۰ تو طہ کی قیمت = ۰۔ پھر جیسے $ک_ب$ صفر سے بڑھتا ہے طہ مسلسل بڑھتا ہے لیکن قیمت طہ = عہ سے متجاوز نہیں ہوتا اور اِس قیمت پر وہ اُس وقت پہنچتا ہے جبکہ $ک_ب = \infty$۔

اگر صہ، عہ سے کم ہے تو طہ کی قیمت، قیمت صہ میں سے گذرے گی جبکہ $ک_ب$ ایک خاص قیمت پر پہنچے۔ یعنے جبکہ

$$\text{کل} = \frac{\text{و جب صہ}}{\text{جب (عہ - صہ)}}$$

اور اس نقطہ پر ا پر پھسلن واقع ہوگی۔

اگر صہ، عہ سے بڑا ہے تو طہ کی قیمت، قیمت صہ پر کبھی بھی نہیں پہنچے گی اور اس لیے ا پر کبھی بھی پھسلن واقع نہیں ہوگی۔ اس لئے توازن ہرگز نہیں ٹوٹے گا اور جتنی قوت سے ب پر ہم دبائیں گے اتنی ہی زیادہ مضبوطی سے حلقہ انگلی اور میز کے درمیان گرفت میں رہے گا۔

اب ہم محصلہ نتیجوں کو خلاصہ کے طور پر ذیل میں درج کرتے ہیں:

اگر صہ > صَہ تو حلقہ میز پر لڑھکتا ہے جوں ہی ہم ب پر دبانا شروع کرتے ہیں۔

اگر عہ < صَہ تو دو صورتیں ہیں:

(ا) عہ > صہ تو حلقہ ا پر پھسلے گا جوں ہی کافی دباؤ لگایا جائے

(ب) عہ < صہ تو حلقہ کسی دباؤ کے تحت بھی متحرک نہیں کیا جا سکتا۔

حلقے کو انگلی کے نیچے سے ا پر پھسلا کر نکال لینے کے لیے (اس صورت میں وہ اچھل کر ہاتھ میں آجائے گا جیسا کہ مشہور ہاتھ کی چالاکی کے کرتب میں کیا جاتا ہے) حلقے کو ایسے نقطہ پر دبانا ضروری ہے جس پر عہ، صہ سے بڑا ہو لیکن صَہ سے کم ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ، صَہ سے بڑا ہو تو حلقہ کو اس طریقے سے پھینکنا ناممکن ہے یہ صرف اس وقت کیا جا سکتا ہے جبکہ انگلی کے ساتھ حلقے کا تماس میز کے ساتھ حلقے کے تماس سے زیادہ کھردرا ہو۔

عام مثالیں

ا۔ دو یکساں سیڑھیوں کو جن میں سے ہر ایک ۱۲ فٹ لمبی اور ۲۰ پونڈ وزنی ہے سرے پر جوڑ کر ایک دوہری سیڑھی بنائی گئی ہے، سیڑھیوں کے ان نقطوں کو جو زمین سے ۵ فٹ بلند ہیں ۷ فٹ لمبی رسی سے ملحق کیا گیا ہے، یہ دوہری سیڑھی ایک چکنے افقی مستوی پر کھڑی ہے اور ایک شخص جس کا وزن

۱۶۰ پونڈ ہے ایک جانب ۹ فٹ بلندی تک چڑھتا ہے۔ رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک وزنی یکساں ڈنڈے کو دو ڈوریوں سے جن کے طول ا، ب ہیں سہارا گیا ہے، ڈوریوں کے اوپر کے سِرے ایک ہی نقطے سے باندھے گئے ہیں اور نیچے کے سِرے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ علی الترتیب ا اور ب کے متناسب ہیں۔

۳۔ دو چھوٹی ثابت کھونٹیاں ایک ایسے خط میں ہیں جو افق سے زاویہ طہ پر مائل ہے۔ ایک کھُردرا پتلا ڈنڈا نچلی کھونٹی کے نیچے سے گذرتا ہے اور اوپر کی کھونٹی پر ٹکا ہے، یہ اونچی کھونٹی ڈنڈے کے مرکز ثقل سے نیچے ہے۔ کھونٹیوں سے اِس مرکز ثقل کے فاصلے علی الترتیب ا اور ب ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ڈنڈا عین حرکت کے نقطے پر ہو تو

$$مہ = \frac{ب - ا}{ب + ا} مس طہ$$

(۱۱۲) ۴۔ دو وزنی یکساں ڈنڈوں کے سِرے، دو ہلکی ڈوریوں سے مربوط ہیں اور یہ پورا نظام ایک ڈنڈے کے وسطی نقطے سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں یا تو ڈنڈے متوازی ہوتے ہیں یا ڈوریاں متوازی ہوتی ہیں۔

۵۔ دو ڈنڈے اب، ج د ایک چکنے میز پر پڑے ہیں اور دو تنی ہوئی ڈوریوں اج، ب د سے باہم ملحق ہیں۔ اگر یہ نظام اُن قوتوں سے جو ڈنڈوں کے وسطی نقطوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں رکھا گیا ہو تو ثابت کرو کہ اگر ڈوریاں متوازی نہیں ہیں تو

(ا) ڈنڈے متوازی ہونے چاہئیں،

(ب) تناؤ ڈوریوں کے متناسب ہونے چاہئیں۔

۶۔ اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ع، وتروں اج، ب د کا نقطہ تقاطع ہے۔ ثابت کرو کہ اب، ج، د پر کی متوازی قوتیں ۷، ۵، ۱۶، ۴ حسب ذیل دوسری متوازی قوتوں کے مماثل ہیں ج د کے

وسطی نقطے پر ۸، ب ج کے وسطی نقطے پر ۱۰، اور ع پر ۱۴
۷ — ایک ٹھوس مکعب زاویہ عہ کے ایک کھردرے مائل مستوی پر رکھا گیا ہے، اس کے قاعدے کے دو کنارے خطوط میلان اعظم پر ہیں۔ رگڑ کا زاویہ صہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر عہ > ۴۵° تو مکعب فوراً اوندھا گرے گا لیکن اگر صہ < عہ < ۴۵° تو مستوی پر نیچے پھسلے گا۔ اگر عہ، صہ یا ۴۵° میں سے کسی سے کم ہو تو وہ رگڑ معلوم کرو جو عمل میں آتی ہے۔
۸ — طول ۲ ل اور وزن و کا ایک یکساں ڈنڈا ایک چکنی کھونٹی پر لٹکا ہوا ہے، کھونٹی پر اس کا فاصلہ انتصابی دیوار سے ف (< ل) ہے اور اس کی سمت افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔ اس کا نچلا سرا دیوار پر دباؤ ڈالے ہے اور اوپر کا سرا ایک انتصابی ڈوری کے ذریعہ تھاما گیا ہے۔ ڈوری کا تناؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ معدوم ہوگا اگر

$$طہ = جتم^{-1}\sqrt[3]{\frac{ف}{ل}}$$

۹ — دو مساوی یکساں کرے جن میں سے ہر ایک کا وزن و اور نصف قطر ا ہے ایک چکنے نیم کروی پیالے میں جس کا نصف قطر ب ہے پڑے ہوئے ہیں۔ ان دو کروں کے درمیان دباؤ معلوم کرو اور نیز ہر کرہ کا دباؤ پیالے پر دریافت کرو۔
۱۰ — ایک یکساں ڈنڈے کے سرے چکنے مائل مستویوں پر ہیں جنکے میلان افق سے عہ اور بہ ہیں۔ افق کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو۔
۱۱ — مثال ۱۰ میں ڈنڈے کے وزن کے مساوی ایک وزن ڈنڈے سے پیوست کیا گیا ہے۔ اس وزن کو کس نقطہ پر لگانا چاہئے کہ ڈنڈا افقاً ساکن رہ سکے۔
۱۲ — وزن و کا ایک یکساں دائری حلقہ ہے جس پر وزن و کے ایک منکے کو پیوست کیا گیا ہے۔ حلقہ ایک کھردری کھونٹی پر لٹک رہا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر جب صہ > $\frac{و}{و + و}$ تو حلقہ بغیر پھسلے ساکن رہ سکتا ہے خواہ اس کا کوئی نقطہ

کھونٹی پر ٹکے جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۳۔ ایک مخمس ا ب ج د ع، پانچ مساوی یکساں وزنی ڈنڈوں کو سروں پر چکنے قبضوں کے ذریعہ جوڑ کر بنایا گیا ہے۔ یہ مخمس ایک انتصابی مُستوی میں تشاکلاً سہارا گیا ہے اِس طور پر کہ ا سب سے اوپر ہے اور اب، اع دو چکنی کھونٹیوں کو مس کرتے ہیں جو ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مخمس منتظم ہو تو کھونٹیاں، اب اور اع میں سے ہر ایک کو نسبت

ا + جب ۱/۱۰ π : ۳ جب ۱/۱۰ π

میں تقسیم کرنی چاہئیں۔

(۱۱۴۳) ۱۴۔ طول ل کا ایک یکساں شہتیر نصف قطر اِ کے ایک نیم کروی پیالے کی اُفقی کور کے سہارے پڑا ہے اور اس کا نچلا سرا پیالے کی چکنی مقعر سطح پر ٹکا ہوا ہے۔ انتصابی کے ساتھ اس کا میلان معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک پیالہ گردشی مکافی نما کی شکل کا ہے جس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اِس کا محور انتصابی ہے۔ ایک یکساں ڈنڈا اماسکے پر کی ایک مینخ پر ٹکا ہوا ہے اور اس کا نچلا سرا اندرونی سطح پر ہے۔ دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ انتصابی کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو۔

۱۶۔ وزن و کا ایک یکساں شہتیر ایک انتصابی دیوار پر اور ایک افقی مُستوی پر جس کے ساتھ وہ زاویہ عہ بناتا ہے ٹکا ہوا ہے، دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ شہتیر کے نچلے سرے کو ایک ڈوری کے ذریعہ دیوار کے پائین سے باندھا گیا ہے۔ رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک سید ہے یکساں وزنی ڈنڈے کا ایک سرا ایک کھُردُرے اُفقی مُستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرے سرے کو ایک رسی کے ذریعہ ایک ثابت نقطے سے ملحق کیا گیا ہے۔ اگر ڈوری، ڈنڈے اور افقی مُستوی کے کل تعامل کے میلان سمت انتصابی کے ساتھ علی الترتیب طہ، فہ، یہ ہوں تو ثابت کرو کہ

مم طہ ± ۲ مم فہ ۔ مم یہ = ۰

۱۸ — ایک ہی مادی شئے کے لیکن مختلف طول کے دو یکساں ڈنڈے ا ب، ب ج آزادانہ طور پر ب پر جوڑے گئے ہیں اور ایک انتصابی دیوار پر نقطوں ا اور ج پر ثبت کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب پر کے تعامل کی سمت زاویہ ا ب ج کی تنصیف کرتی ہے۔

۱۹ — وزن و کے ایک یکساں منتظم مسدسی تختہ ا ب ج د ع ف کو تین کھونٹیوں پر جو کونوں ا، ب پر اور د ع کے وسطی نقطہ پر واقع ہیں افقی محل میں سہارا گیا ہے۔ کھونٹیوں پر دباؤ معلوم کرو۔

۲۰ — دو کُرے جن کے نصف قطر ا، ب اور وزن و، وَ ہیں علی الترتیب طول ل، لَ کی ڈوریوں کے ذریعہ چھت کی ایک ہی کنڈی سے آزادانہ لٹکائے گئے ہیں۔ اگر لَ > ل + ۲ ا تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو پہلی ڈوری انتصابی کے ساتھ بناتی ہے حسب ذیل ہے۔

$$\text{جب}^{-1} \frac{\text{وَ ا}}{(\text{و} + \text{وَ})(\text{ا} + \text{ل})}$$

۲۱ — ایک یکساں ڈنڈا طول ل، لَ کی دو ڈوریوں کے ذریعے جو اس کے سروں سے اور دو کنڈیوں سے بندھی ہیں لٹکتا ہے۔ کنڈیاں ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں۔ اگر ڈوریاں ایک دوسرے کو عبور کریں اور اُفق کے ساتھ علی الترتیب زاوئے عہ، عَہ بنائیں تو ثابت کرو کہ جب ڈنڈا توازن میں ہوتا ہے تو

$$\text{جب (عہ + عَہ) (لَ جم عَہ − ل جم عہ) = ا جب (عہ − عَہ)}$$

۲۲ — طول ۲ ب کا ایک یکساں تختہ اِس طرح ساکن ہے کہ اِس کا ایک سرا ایک کھردرے افقی مستوی پر ہے اور تختہ نصف قطر ا کے ایک چکنے ثابت اسطوانہ کو جو مستوی پر پڑا ہے مس کرتا ہے اور مستوی کے ساتھ زاویہ ۲ عہ بناتا ہے۔ رگڑ کی قدر صہ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ممکن ہے اگر

$$\text{ا جب صہ > ب مس عہ جم ۲ عہ جب (۲ عہ + صہ)}$$

۲۳ — دو مساوی اور مشابہ متساوی الساقین قانے جن میں سے ہر ایک کا

وزن و اور انتصابی زاویہ ۲ عہ ہے پہلو بہ پہلو رکھے گئے ہیں۔ اِن کے قاعدے ایک افقی میز پر ہیں اور وہ میز کو وہ ایک کنارے پر عین مس کرتے ہیں۔ وزن و اور نصف قطر ر کا ایک چکنا کُرہ اُن کے درمیان سہارا گیا ہے اور وہ ہر ایک کے ایک رُخ کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے لیے یہ ضروری ہے کہ

$$\text{مہ} > \frac{\text{و مم عہ}}{\text{۲ و + و}}\ ،\ \text{ر} < \text{۲ ا جب عہ مس عہ} \left(1 + \frac{\text{و}}{\text{و}}\right)$$

جہاں مہ رگڑ کی قدر کو تعبیر کرتا ہے اور ۲ ا فانے کے قاعدے کا طول ہے۔

۲۴ ـ وزن و کا ایک مستطیلی تختہ ایک ثابت کھُردرے کُندے پر جس کی شکل ایک افقی مستدیر اسطوانے کی ہے آڑا پڑا ہوا ہے۔ تعادُل کی حالت میں افقی کے ساتھ یہ تختہ جو زاویہ بناتا ہے وہ عہ تک بڑھ جاتا ہے جبکہ اِس کے نیچے کے اور اوپر کے سِروں پر علی الترتیب وزن و اور وَ رکھے جاتے ہیں اور یہ زاویہ بہ تک گھٹ جاتا ہے جب کہ اِن وزنوں کا باہمی تبادلہ کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ تختہ کا میلان افق کے ساتھ جبکہ اُس پر کوئی وزن نہ ہو حسب ذیل ہے:

$$\frac{\text{وَ}(\text{و} + \text{وَ} + \text{و})(\text{وَ عہ} - \text{و بہ})}{\text{و}(\text{و} + \text{وَ} - \text{وَ})(\text{و} - \text{وَ})}$$

جہاں وَ وہ وزن ہے جس کو اوپر کے سِرے پر رکھنے سے تختہ افقاً متوازن ہوتا ہے۔

۲۵ ـ ایک زنجیر ۲ ن بالکل مشابہ کڑیوں سے بنی ہے اور متصلہ کڑیوں کے درمیان تماس کامل چکنے ہیں۔ سِروں پر کی دو کڑیاں ایک افقی تار میں پھسل سکتی ہیں لیکن یہاں تماس کھُردرے ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے ثابت کرو کہ توازن کے انتہائی محل میں اوپر کی کڑیوں میں سے کسی ایک کا میلان انتصابی کے ساتھ حسب ذیل ہے

$$\text{مس}^{-1} \frac{\text{۲ ن مہ}}{\text{۲ ن} - 1}$$

۲۶ ـ نصف قطر ر کے دو مساوی دائری قرص جن کے کنارے چکنے ہیں

اپنے چپٹے رخوں پر دو چکنے انتصابی مستویوں کے درمیانی کونے میں رکھے گئے ہیں، یہ مستوی زاویہ ۲ عہ پر ایک دوسرے سے مائل ہیں اور قرص ایک دوسرے کو اس خط پر مس کرتے ہیں جو اس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ بڑے سے بڑا قرص جو اُن کے درمیان بغیر اِن کو ہٹائے بٹھایا جا سکتا ہے وہ ہے جس کا نصف قطر ر (قط عہ - ۱) ہے۔

۲۷ — مثال ماسبق کے نتیجے میں کیا ترمیم کرنی ہو گی اگر تمام تماس کھردرے ہوں اور ہر تماس پر رگڑ کا زاویہ عہ ہو۔

۲۸ — دو یکساں سیڑھیاں ایک سرے پر جوڑی گئی ہیں اور یہ دوہری سیڑھی ایک کھردرے اُفقی مستوی پر اپنے دوسرے سروں پر کھڑی ہے۔ ایک شخص جس کا وزن ایک سیڑھی کے وزن کے مساوی ہے ایک سیڑھی پر چڑھتا ہے ثابت کرو کہ دوسری سیڑھی پہلے پھسلے گی۔

اگر وہ پھسلنے لگے جبکہ شخص فاصلہ لا تک چڑھ چکا ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر

$\frac{\text{ا + لا}}{\text{۲ ا + لا}}$ ہے جہاں ا ہر سیڑھی کا طول ہے اور عہ وہ زاویہ ہے جو ہر سیڑھی انتصابی سے بناتی ہے۔

(۱۱۵) ۲۹ — ایک غیر وزنی سیڑھی، وزن و کے ایک چکنے مکعب کے سہارے چکنی زمین پر کھڑی ہے اور سیڑھی کا پایہ مکعب کے زیر ترین کناروں میں سے ایک کے وسطی نقطہ کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ بندھا ہے۔ وزن و کا ایک شخص سیڑھی پر چڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سیڑھی مکعب کے سرے سے باہر نکلی ہوئی ہو تو مکعب اُلٹ جائیگا قبل اس کے کہ شخص مکعب کے سرے پر پہنچے اِلاّ انکہ

و > ۲ د جم عہ (جب عہ - جم عہ)

جہاں افق کے ساتھ سیڑھی کا زاویہ میلان عہ ہے۔

۳۰ — چار مساوی کُرے ایک چکنے کُروی پیالے کی تہہ میں پڑے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں کُروں کے مرکز ایک افقی مستوی میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دوسرا مساوی کرہ اِن پر رکھا جائے تو نیچے کے کُرے جدا ہو نگے

اگر پیالے کا نصف قطر ایک کرہ کے نصف قطر کے $(2\sqrt{13}+1)$ گنے سے بڑا ہو۔

۳۱۔ تین مساوی کرے ایک چکنے افقی مستوی پر ساکن ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ اِن کے مرکز ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں اور کروں کو باہم ایک مہین ڈوری سے جو اِن کے گرد گذرتی ہے اور مرکزوں کے مستوی میں ہے باندھا گیا ہے۔ اگر دوسرا مساوی کرہ اِن پر متشاکلاً رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ بقدر $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ و کے بڑھ جاتا ہے جہاں و اوپر کے کرہ کا وزن ہے۔

۳۲۔ ایک قائم مستدیر مخروط جس کا انتصابی زاویہ ۲ ع ہے اپنے قاعدہ کے سہارے ایک افقی کھردرے مستوی پر ساکن ہے۔ اس کے راس سے ایک ڈوری باندھ کر ڈوری کو افقی سمت میں بتدریج بڑھنے والی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ معلوم کرو کہ توازن اولاً کس طرح ٹوٹیگا۔

۳۳۔ ایک وزنی ذرہ کو ایک کھردرے مائل مستوی پر رکھا گیا ہے جس کا میلان رگڑ کے زاویہ کے ٹھیک مساوی ہے۔ ذرہ سے ایک تاگا باندھ کر تاگے کو مستوی کے ایک سوراخ میں سے جو ذرہ کے نیچے ہے گذارا گیا ہے لیکن تاگا سوراخ میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تاگے کو سوراخ میں سے بتدریج کھینچا جائے تو ذرہ ایک خط مستقیم اور ایک نیم دائرہ علی التواتر مرتسم کرے گا۔

۳۴۔ وزن و کا ایک ایکساں مکعبی کندہ ایک کھردرے مائل مستوی پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک کنارہ افقی ہے۔ اور کندے کے سہارے ایک کھردرا کرہ ہے جس کا وزن وَ ہے اور جس کا نصف قطر مکعب کے ایک کنارے سے کم ہے۔ مستوی کے میلان کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے۔ وہ مختلف طریقے معلوم کرو جن میں توازن ٹوٹ سکتا ہے اور معلوم کرو کہ کسی معلومہ صورت میں کون سا طریقہ واقع ہوگا۔

۳۵۔ ایک کھردرے ایکساں ڈنڈے کو ایک افقی مستوی پر رکھا گیا ہے اور اس کے طول کے نقاط تثلیث میں سے ایک نقطہ پر ایک افقی قوت

اِس کے طول کے عمود وار سمت میں عمل کرتی ہے ۔ معلوم کرو کہ کس نقطہ کے گرد ڈنڈا گھومنے لگیگا ۔

۳٦ ــ ایک وزنی سلاخ ا ب کو طول ل کی دو مساوی ڈوریوں کے ذریعہ جو ابتداً متوازی ہیں لٹکایا گیا ہے ۔ وہ جفت معلوم کرو جس کو سلاخ پر لگانا ہوگا تاکہ سلاخ کو افقی مستوی میں زاویہ طہ میں سے گھما دینے کے بعد ساکن رکھا جا سکے ۔

۳۷ ــ ایک دروازے کے قبضوں کا خط انتصابی سے زاویہ عہ پر مائل (۱۱٦)
ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ جفت جب عہ جب طہ کے متناسب ہے جو دروازے کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہوتا ہے جو توازن کے محل سے زاویہ طہ پر مائل ہو ۔

۳۸ ــ ثابت کرو کہ ایک اُستوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کو دو مساوی قوتوں میں جو مرکزی محور سے مساوی طور پر مائل ہوں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔

۳۹ ــ ثابت کرو کہ دو قوتوں ف اور ق کا مرکزی محور اِن کے خطوط عمل کے درمیانی فاصلہ م کو قطع کرتا ہے اور اِس کو نسبت

$$\text{ق}\,(\text{ق} + \text{ف جم طہ}) : \text{ف}\,(\text{ف} + \text{ق جم طہ})$$

میں تقسیم کرتا ہے جہاں طہ قوتوں کی سمتوں کا درمیانی زاویہ ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ صدر جفت کا معیار حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{م ف ق جب طہ}}{\sqrt{\text{ف}^2 + \text{ق}^2 + 2\,\text{ف ق جم طہ}}}$$

۴۰ ــ ثابت کرو کہ دو معلومہ رنچوں $(\text{ک}_1، \text{ھ}_1)$ اور $(\text{ک}_2، \text{ھ}_2)$ کے حاصل کا محور رنچوں کے محوروں کے درمیانی چھوٹے فاصلہ ۲ م کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا فاصلہ وسطی نقطہ سے حسب ذیل ہے :

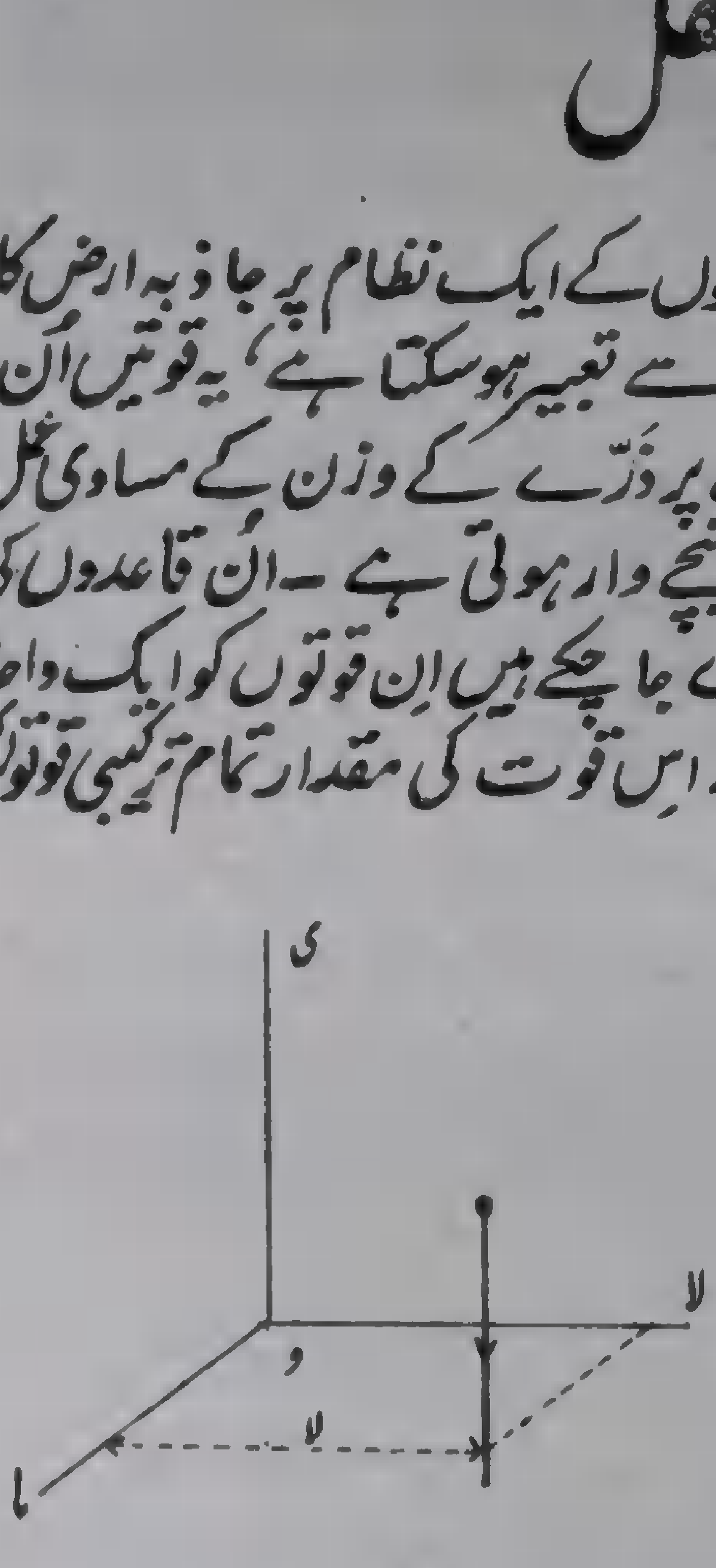
$$\frac{(\text{ک}_1^2 - \text{ک}_2^2)\,\text{م} + (\text{ھ}_1\,\text{ک}_2 - \text{ھ}_2\,\text{ک}_1)\ \text{جب طہ}}{\text{ک}_1^2 + \text{ک}_2^2 + 2\,\text{ک}_1\,\text{ک}_2\ \text{جم طہ}}$$

جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو رنچوں کے محوروں کے درمیان ہے ۔

(۱۱۷)

چھٹا باب
مرکز ثقل

۸۵ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ کمیتوں کے ایک نظام پر جاذبہ ارض کا عمل متوازی قوتوں کے ایک نظام سے تعبیر ہو سکتا ہے، یہ قوتیں اُن قوتوں پر مشتمل ہوتی ہیں جو ہر ذرّے پر ذرّے کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہیں، اور اِن کی سمت انتصاباً نیچے وار ہوتی ہے ۔ اُن قاعدوں کی بموجب جو باب ماسبق میں سمجھائے جا چکے ہیں اِن قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے ۔ اِس قوت کی مقدار تمام ترکیبی قوتوں کا مجموعہ ہے اور اِس لیے وہ جسم کا کُل وزن ہے، اور اِس قوت کی سمت ترکیبی قوتوں کے متوازی ہونے کی وجہ سے خود انتصاباً نیچے وار ہے ۔ اِس باب میں اِس قوت کے خطِ عمل کے محل کو معلوم کرنے کا مسئلہ زیر بحث رہیگا ۔



شکل (۶۴)

۸۶ — فرض کرو کہ ذروں کی کمیتیں ک$_1$، ک$_2$، ... ہیں ۔

فرض کرو کہ قائم محور لیے گئے ہیں جن میں محور ی انتصابی ہے اور فرض کرو کہ پہلے ذرے کے محدّد لا، ما، ی ہیں، دوسرے ذرے کے محدّد

لا_2، ما_2، ی_2، اور علیٰ ہذا القیاس ـــ

پہلے ذرے کا وزن $\text{ک}_1 \text{ج}$ ہے اور اِس کا خطِ عمل مستوی و لا ما کو ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے مُحدّدِ لا_1، ما_1 ہیں ـــ اِس لیے اِس قوت کا معیار محور و ما کے گِرد $\text{ک}_1 \text{ج} \; \text{لا}_1$ ہے ـــ

فرض کرو کہ حاصل کا خطِ عمل مُستوی و لا ما کو نقطہ $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$ پر قطع کرتا ہے ـــ اب حاصل کا معیار محور و ما کے گِرد $(\Sigma\, \text{ک}_1) \text{ج}\, \bar{\text{لا}}$ ہے جہاں $\Sigma\, \text{ک}_1$ سے تمام ذروں کی کمیتوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے ـــ

چونکہ حاصل کا معیار جدا جدا قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اِس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئیے (۱۱۸)

$$(\Sigma\, \text{ک}_1)\, \text{ج}\, \bar{\text{لا}} = \Sigma\, (\text{ک}_1 \text{ج}\, \text{لا}_1)$$

اِس لیے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\, \text{ک}_1 \text{لا}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}$$

اسی طرح

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\Sigma\, \text{ک}_1 \text{ما}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}$$

اِن مساوانوں سے اُس نقطہ کے مُحدّدِ $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$ حاصل ہوتے ہیں جس پر حاصل کا خطِ عمل مُستوی و لا ما سے ملتا ہے ـــ

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ نقطہ لا_1، ما_1، ی_1 پر کی کمیت ک_1، نقطہ لا_2، ما_2، ی_2 پر کی کمیت ک_2، وغیرہ کے مرکز ہندسی کے محدد حسب ذیل ہیں

$$\text{لا} = \frac{\Sigma\, \text{ک}_1 \text{لا}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}،\quad \text{ما} = \frac{\Sigma\, \text{ک}_1 \text{ما}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}،\quad \text{ی} = \frac{\Sigma\, \text{ک}_1 \text{ی}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}$$

اِس لیے وہ نقطہ جس پر مرکز ہندسی میں سے گذرنے والا انتصابی مُستوی و لا ما کو قطع کرتا ہے

$$\frac{\Sigma\, \text{ک}_1 \text{لا}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}،\; \frac{\Sigma\, \text{ک}_1 \text{ما}_1}{\Sigma\, \text{ک}_1}،\; .$$

ہونا چاہئیے یعنے یہ نقطہ، نقطہ $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$، ہونا چاہئیے جس پر حاصل قوت کا

خطِ عمل مستوی ولا ما سے ملتا ہے۔ اس لیے

جاذبہ ارض کی حاصل قوت کا خطِ عمل وہ انتصابی خط ہے جو ذروں کے مرکزِ ہندسی میں سے گذرتا ہے۔

یہی وجہ ہے کہ نقطوں کی کسی تعداد کا مرکزِ ہندسی جب کہ اِن نقطوں کو اُن ذروں کی کمیتوں کی بموجب وزنی بنایا گیا ہو جو اُن نقطوں پر ہیں ذروں کا مرکزِ ثقل کہلاتا ہے۔ ایک اُستوار جسم پر جاذبہ کا اثر جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں ایک واحد قوت سے تعبیر ہوتا ہے جو جسم کے مرکزِ ثقل میں سے انتصاباً نیچے وار عمل کرتی ہے، اس قوت کی مقدار جسم کے کل وزن کے مساوی ہوتی ہے۔ اِس لئے جاذبہ کا عمل وہی ہے جو ہوتا اگر جسم کی کل کمیت ایک واحد ذرے میں جو مرکزِ ثقل پر رکھا ہو مرتکز ہوتی۔

(۱۱۹) ۸۷۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک اُستوار جسم کو یا اجسام کے نظام کو ایک ڈوری کے ذریعہ لٹکائیں تو مرکزِ ثقل ڈوری کے انتصاباً نیچے ہونا چاہیئے۔ کیونکہ نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں دو قوتوں میں تحلیل ہوتی ہیں۔ ڈوری کا تناؤ اور وزن جو مرکزِ ثقل پر عمل کرتا ہے۔ اور توازن کی حالت میں یہ دو قوتیں ایک ہی خط پر عمل کرنی چاہئیں۔

اسی طرح یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر ایک جسم کو ایک نقطہ پر اس طریقہ رکھا جائے کہ وہ اس نقطہ پر توازن کی حالت میں ہو تو مرکزِ ثقل اِس نقطہ کے انتصاباً اوپر ہونا چاہیئے۔

۸۸۔ دفعہ (۷۷) میں مرکزِ ثقل کے محل کی چند سادہ مثالیں بیان کی جا چکی ہیں۔ وہ حسب ذیل تھیں:

(ا) ایک یکساں ڈنڈے کا مرکزِ ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہوتا ہے،

(ب) ایک یکساں دائری قرص، دائری حلقہ، یا کرہ کا مرکزِ ثقل اِس کے مرکز پر ہوتا ہے،

(ج) ایک مکعب یا متوازی السطوح کا مرکزِ ثقل مرکز پر ہوتا ہے

(یعنے وتروں کے نقطہ تقاطع پر)۔

۸۹ — اجسام کے کسی نظام کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے جبکہ اس کے حصوں میں سے ہر ایک کا مرکز ثقل معلوم ہو۔ کیونکہ ہر حصہ کے وزن کو ایک واحد قوت سمجھنے سے جو اس کے مرکز ثقل میں سے عمل کرتی ہے ہمیں عمل کرنے والی متوازی قوتوں کی ایک تعداد ملے گی اور ان متوازی قوتوں کو بیان کردہ قاعدوں کی بموجب مرکب کرنے سے حاصل کے خط عمل سے وہ خط معلوم ہو گا جس پر کلُ وزن عمل کرے گا۔ اس طرح اجسام کے کل نظام کا مرکز ثقل جداگانہ اجسام کے مراکز ثقل کا مرکز ہندسی ہو گا جبکہ ان مراکز ثقل کو جسموں کی کمیتوں کی بموجب وزنی سمجھا گیا ہو۔

۹۰ — مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک رقاص کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو طول ل اور وزن و کے ایک تار پر جس کے ساتھ وزن و کا ایک دائری شاقول لٹکا ہوا ہے مشتمل ہے۔ فرض کرو کہ شاقول کے دائرے کا مرکز تار کے سرے سے فاصلہ ا پر ہے۔

فرض کرو کہ تار ا ب ہے، شاقول کا مرکز ج ہے اور تار کا وسطی نقطہ د ہے۔ تار کا مرکز ثقل د پر ہو گا اور شاقول کا ج پر، اس لیے اس نظام کا مرکز ثقل نقطوں د اور ج کے مرکز ہندسی پر ہو گا جبکہ ان نقطوں کو نسبت و : و میں وزنی بنایا گیا ہو۔ اس مرکز ثقل کو ث سے تعبیر کیا جائے تو ضابطہ 120

$$\text{لا} = \frac{\sum \text{ک}_1 \text{لا}_1}{\sum \text{ک}_1}$$



شکل (۶۵)

سے جبکہ خط ا د ج ب کو محور لا اور ا کو مبداء فرض کیا جائے حاصل ہوتا ہے

$$\text{اث} = \frac{\text{و} \times \text{اج} + \text{و} \times \text{اد}}{\text{و} + \text{و}}$$

$$= \frac{\text{و}(\text{ل} - \text{ا}) + \frac{1}{2}\,\text{و ل}}{\text{و} + \text{و}}$$

مثالیں

۱ ــ ایک مُربع کے تین کونوں میں سے ہر ایک پر ۳ پاؤنڈ کے وزن رکھے گئے ہیں اور چوتھے کونے پر ۵ پونڈ کا ایک وزن رکھا گیا ہے ۔ مرکز ثقل معلوم کرو ۔

۲ ــ مقوے کے ایک مربع کے ایک کونے سے ۳ انچ کنارے کا ایک مربع کاٹ لیا گیا ہے ۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو اگر اول الذکر مربع کا کنارا ۶ انچ ہو ۔

۳ ــ ۶ اونس وزن اور ۶ انچ طول کے ایک پتلے ڈنڈے کو ۶ اونس وزن اور ۶ انچ نصف قطر کے ایک دائرے پر اِس طرح ثبت کیا گیا ہے کہ اِس کے سرے دائرے کے محیط پر ہیں ۔ کُل کا مرکز ثقل معلوم کرو ۔

۴ ــ بائیسکل کے ایک پہیہ کا قطر ۲۶ انچ اور وزن ۳ پونڈ ہے ۔ اِس کے ہر اڑے کا طول ۱۱ انچ ہے اور ہر اڑا پہیہ کے مرکزی محور سے نصف انچ فاصلے پر ناف (Hub) سے نکلتا ہے ۔ اگر ایک اڑے کو پہیہ سے جدا کر لیا جائے تو پہیہ کا مرکز ثقل معلوم کرو ۔

۵ ــ ایک ہتوڑے کا دستہ لکڑی کا اسطوانہ ہے جس کا طول ۸ انچ، نصف قطر $\frac{3}{4}$ انچ، وزن ۸ اونس ہے ۔ ہتوڑے کا سرا لوہے کا ایک سطوانہ ہے جس میں ایک سوراخ بنا ہوا ہے جس کے اندر دستہ ٹھیک بیٹھتا ہے ہتوڑے کے اِس سرے کا طول ۳ انچ، نصف قطر $1\frac{1}{4}$ انچ اور وزن ۳ پونڈ ہے ۔ مرکز ثقل کا تقریبی محل معلوم کرو ۔

۶ ــ ایک صندوق بغیر ڈھکن کے ایک انچ موٹی لکڑی سے بنایا گیا ہے اِس کے اندرونی ابعاد ۱۲ × ۱۲ × ۱۲ انچ ہیں ۔ اِس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو ۔

۷ ــ طول ۲۸ انچ کے ایک یکساں پتلے ڈنڈے کو اِس طریقہ سے خم دیا گیا ہے کہ ۱۲ انچ اور ۱۶ انچ کے دو حصے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ۔ مرکز ثقل

معلوم کرو۔

۸۔ ایک یکساں تار کو ایک مثلث کی شکل میں خم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تار کا مرکز ثقل اس دائرے کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے جو اس مثلث کے اندر بنایا گیا ہو جو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بنتا ہے۔

۹۔ ایکساں کثافت کے دیو دار سے شکل T کا گنیا بنایا گیا ہے، آڑے جزو کے ابعاد ۶ × ۲ × $\frac{1}{4}$ انچ ہیں اور کھڑے جزو کے ابعاد ۸ × $\frac{1}{2}$ ۱ × $\frac{1}{8}$ انچ۔ آڑے جزو کو اس طرح تراشا گیا ہے کہ اس کی نیچے کی سطح مستوی ہے۔ کل نظام کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو۔

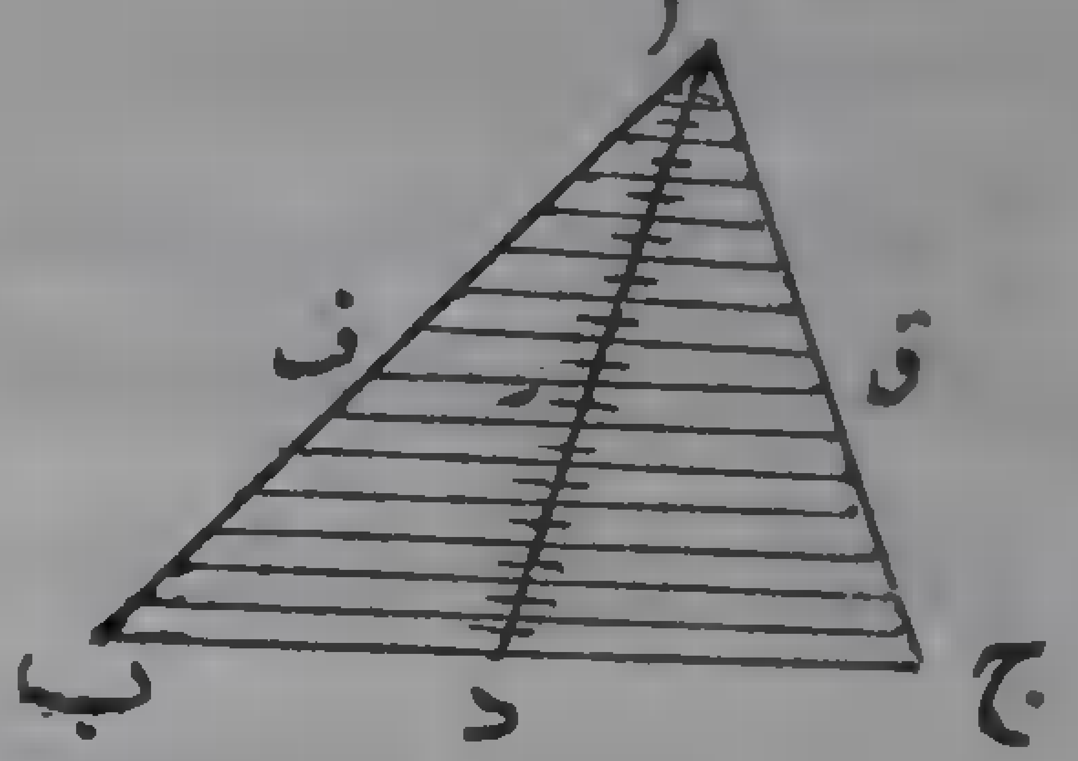
(۱۲۱) ۱۰۔ وزنوں و$_۱$، و$_ب$، و$_ج$ کے تین منکے ایک دائری تار میں پروئے گئے ہیں اور جب منکے دائرے کے نقطوں ا، ب، ج پر ہوتے ہیں تو کل نظام کا مرکز ثقل دائرہ کے مرکز و پر منطبق ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{و_۱}{جب\ ب\ و\ ج} = \frac{و_ب}{جب\ ج\ و\ ا} = \frac{و_ج}{جب\ ا\ و\ ب}$$

پترے کا مرکز ثقل

۹۱ — پترا پتلا اور مستوی ہوتا ہے اور اس کی موٹائی اور کثافت ایکساں ہوتی ہے مثلاً ایک مقوے کی چادر سے ہم کوئی شکل کاٹ لیں۔ کسی پترے کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرنا اکثر اہم ہوتا ہے۔

۹۲ — **مثلث کا مرکز ثقل** — فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلثی پترا ہے جس کے مرکز ثقل کے محل کو معلوم کرنا مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ مثلث کو قاعدہ ب ج کے متوازی خطوں سے لاانتہا تنگ پٹیوں کی ایک بہت بڑی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ کوئی پٹی ف ق ہے۔ چونکہ



شکل (٦٦)

بموجب فرض ہم اس پٹی کو لاانتہا کم عرض اور موٹائی کی سمجھ سکتے ہیں اس لیے ہم اس کو ایک پتلا ایکساں ڈنڈا تصور کر سکتے ہیں۔ کسی پتلے ایکساں ڈنڈے کا مرکز ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہوتا ہے، اس لیے پٹی ف ق کے وزن کو ر پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے جو ف ق کا وسطی نقطہ ہے۔

دوسری پٹیوں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے۔ اس لیے پورے مثلث کے وزن کی بجائے ذروں کے ایک نظام کے اوزان جو ان پٹیوں کے وسطی نقطوں پر واقع ہوں رکھے جا سکتے ہیں۔

اب اگر قاعدہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہو تو تمام پٹیوں کے وسطی نقطے خط ا د میں واقع ہوتے ہیں۔ اس لیے مثلث کے وزن کی بجائے ذروں کی ایک تعداد کے اوزان ہیں جو سب کے سب خط ا د میں واقع ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پورے مثلث کے مرکز ثقل کو خط ا د میں واقع ہونا چاہیئے۔

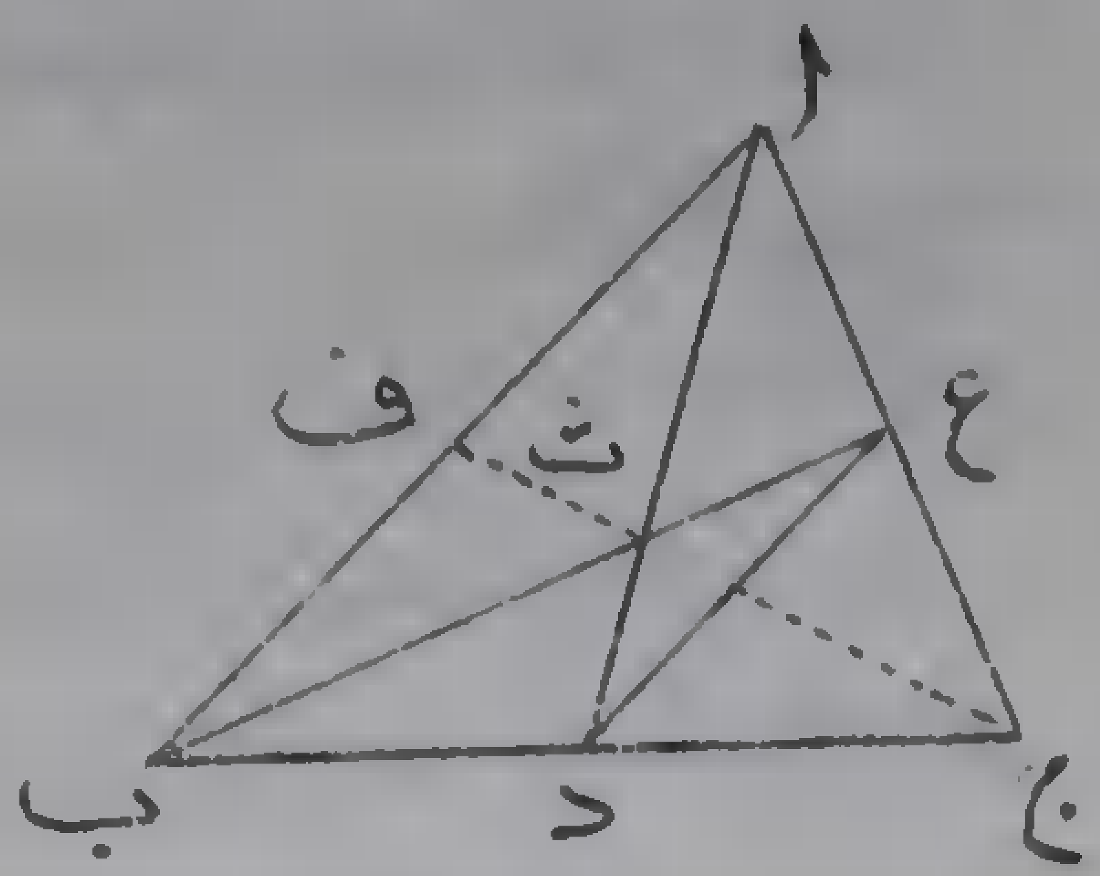
اسی طرح ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مثلث کو ضلع ا ج کے متوازی (۱۲۲)
پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اب یہ معلوم ہوگا کہ مثلث کے مرکز ثقل کو خط ب ع میں واقع ہونا چاہیئے جہاں ع، ضلع ا ج کا وسطی نقطہ ہے۔

ان دو نتیجوں سے مرکز ثقل کا محل پوری طرح متعین ہو جاتا ہے، چنانچہ اس کو خطوط ا د، ب ع کا نقطہ تقاطع ہونا چاہیئے۔

د ع کو ملاؤ۔ مثلثات د ج ع، ب ج ا مشابہ ہیں جنمیں سے مثلث د ج ع، مثلث ب ج ا کے ابعاد کا عین نصف ہے۔

اِس لیے د ع، ا ب کے متوازی اور اس کا نصف ہونا چاہیئے۔

اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ د ث ع اور ا ث ب مشابہ مثلث ہیں جن میں سے مثلث د ث ع، مثلث ا ث ب کے ابعاد کا نصف ہے۔ اس لیے ث د، ا ث کا نصف ہے۔



شکل (٦٧)

اِس طرح ث، ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

اگر ہم ج کو ف سے ملائیں جو ا ب کا وسطی نقطہ ہے تو ہم اُسی طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں کہ ج ف، ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔ اِس لیے ج ف کو بھی نقطہ ث میں سے گذرنا چاہیئے۔

اِن تین خطوں ا د، ب ع، ج ف کو جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطوں سے ملاتے ہیں مثلث کے خطوط وسطی کہا جاتا ہے۔ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ یہ تین خطوط وسطی ایک ہی نقطہ ث میں ملتے ہیں اور یہ نقطہ مثلث کا مرکز ثقل ہے۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا ہے کہ مرکز ثقل ہر خط وسطی کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے یعنے وہ خط وسطی پر قاعدے سے اپنے کُل طول کے ایک ثلث فاصلے پر واقع ہے۔

۹۳۔ کسی کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل

کسی مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل اِس کو مثلثوں میں تقسیم کر کے اور ہر مثلث کی بجائے اِس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھ کر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل تین مساوی ذروں کے مرکز ثقل پر منطبق

ہوتا ہے جو اس کے راسوں پر رکھے گئے ہوں۔

۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کا مرکز ثقل مرکز عمودی پر منطبق ہو تو مثلث متساوی الاضلاع ہے۔

۳۔ مقوے کے ایک مربع کو ایک وتر پر اتنا موڑا گیا ہے کہ اس کے دو حصے علی التوالی عمود ہیں۔ اس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو۔

۴۔ ایک مثلثی پترے کا ربع حصہ ایک خط سے جو قاعدے کے متوازی ہے کاٹ لیا گیا ہے۔ بقیہ حصہ کا مرکز ثقل کہاں ہے؟

۵۔ ایک پترے سے جس کی شکل متساوی الاضلاع مثلث کی ہے ایک (۱۲۳)
قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث کاٹ لیا گیا ہے جس کا قاعدہ وہی ہے جو ابتدائی مثلث کا ہے۔ شکل ۷ کے بقیہ حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

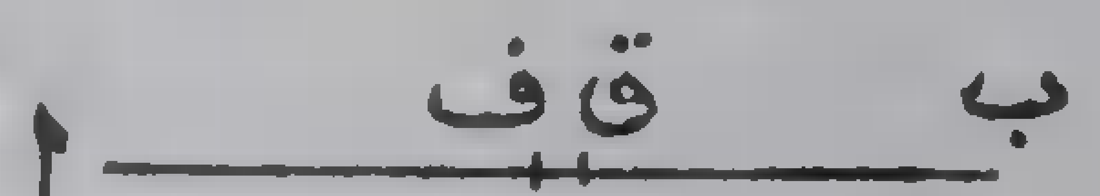
۶۔ ایک ذوار بعۃ الاضلاع کا مرکز ثقل اس کے ایک وتر پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ یہ وتر دوسرے وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

مرکز ثقل کو عمل تکمل سے معلوم کرنا

۹۴۔ متغیر کثافت کے ایک ڈنڈے کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ اب ایک ڈنڈا ہے جس کا وزن فی اکائی طول نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ پر اس کا وزن فی اکائی طول شہ ہے۔

فرض کرو کہ ف، ق دو متصلہ نقطے ہیں جن کے فاصلے نقطہ ا سے علی الترتیب لا اور لا + فرلا ہیں۔ اب طول ف ق، فرلا ہے اور اس کی کمیت شہ فرلا ہے



جہاں شہ سے اس نقطہ پر کی کمیت فی اکائی طول تعبیر ہوتی ہے۔

شکل (۶۸)

جب فرلا کو لاانتہا چھوٹا بنایا جاتا ہے تو نقطہ ا سے ف ق کے مرکز ثقل کا فاصلہ لا لیا جا سکتا ہے۔ پس

اگر لاَ سے وہ فاصلہ تعبیر ہو جو ا سے پورے ڈنڈے کے مرکز ثقل کا ہے تو

$$\text{لاَ} = \frac{\Sigma\ (\text{ک لا})}{\Sigma\ \text{ک}}$$

جہاں ک کسی عنصر کی مثلاً ف ق کی کمیت ہے اور حاصل جمع اُن تمام ذروں کے لیے معلوم کیا گیا ہے جن سے ڈنڈا بنا ہے۔ ثہ فرلا رکھنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\text{لاَ} = \frac{\Sigma\ (\text{ثہ لا فرلا})}{\Sigma\ (\text{ثہ فرلا})}$$

یا تکملی احصاء کی ترقیم میں

$$\text{لاَ} = \frac{\int \text{ثہ لا فرلا}}{\int \text{ثہ فرلا}} \qquad \text{(۲۸)}$$

جہاں تکمل ہر صورت میں پورے ڈنڈے پر لیا جاتا ہے۔ متغیر ثہ، لا کا ایک تفاعل ہوگا اور تکمل کی تکمیل نہیں ہو سکتی جب تک کہ اِس تفاعل کی ٹھیک شکل معلوم نہ ہو۔

۹۵ — ایک خاص مثال لو اور فرض کرو کہ کثافت ایک سرے سے (۱۲۴) دوسرے سرے تک ایکساں طور پر بڑھتی ہے۔ فرض کرو کہ ا پر کثافت صفر ہے اور ب پر ث۔ اگر ڈنڈے کا طول ل ہو تو ا سے فاصلہ لا پر کثافت ث $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)$ ہو گی۔ اِس لیے ہمیں ضابطہ (۲۸) میں رکھنا چاہیئے

$$\text{ثہ} = \text{ث} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)$$

اور اِس سبب سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \text{ث}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)\text{لا فرلا}}{\int \text{ث}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)\text{فرلا}}$$

جہاں تکمل لا = ۰ سے لا = ا تک ہے۔ نسب نما اور شمار کنندہ کو $\frac{\text{ث}}{\text{ا}}$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_{\text{۰}}^{\text{ا}} \text{لا}^{\text{۲}}\,\text{فرلا}}{\int_{\text{۰}}^{\text{ا}} \text{لا فرلا}}$$

$$= \frac{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\,\text{ا}^{\text{۳}}}{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ا}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{ا}$$

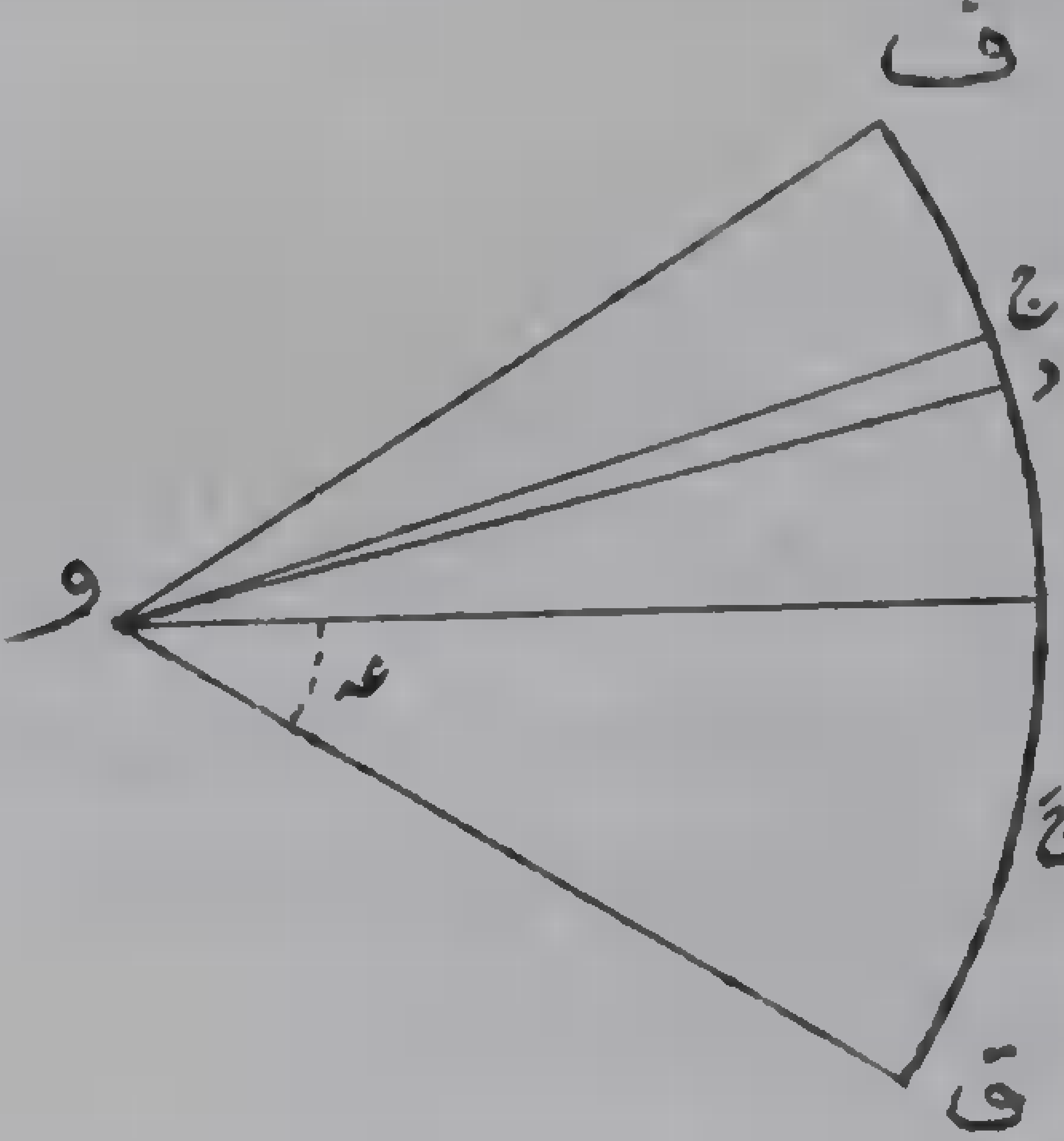
جس سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز ثقل ڈنڈے پر ابتدائی سرے سے اسکے طول کے دو ثلث فاصلے پر واقع ہے۔

۹۶ ۔ ہم اس نتیجے کو مثلث کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں۔ حسب دفعہ ۹۲ ہم مثلث کو متوازی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر پٹی کی بجائے اس کے وسطی نقطہ پر ایک ذرہ رکھتے ہیں ہر ذرہ کا وزن اس پٹی کے وزن کے مساوی ہونا چاہیے جس کی جگہ پر اس کو رکھا گیا ہے اور وہ پٹی کے عرض اور طول کے متناسب ہونا چاہیئے۔ اگر کسی ذرہ کا فاصلہ ا سے خط وسطی ا د پر پیمائش کردہ لا ہو تو پٹی کا عرض فرلا کے متناسب ہے جو وہ طول ہے جو خط وسطی پر منقطع ہوتا ہے، اور پٹی کا طول لا کے متناسب ہے جو ضلع ا سے فاصلہ ہے۔ اس طرح ث فرلا کو صرف لا فرلا کے متناسب ہونا چاہیئے اور جیسا کہ ہم ابھی معلوم کر چکے (۱۲۵) ہیں اس سے حسب ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{ا}$$

جہاں ا خط وسطی کا طول ہے ۔ یہ ٹھیک وہی نتیجہ ہے جو پہلے حاصل ہوا تھا ۔

۹۷ ۔ دائری قوس کا مرکز ثقل ۔ اسی طریقہ کو ایک تار کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں جو ایک دائری قوس ف ق کی شکل میں خمایا گیا ہے استعمال کیا جا سکتا ہے ۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور قوس کا وسطی نقطہ ا ہے اور فرض کرو کہ پوری قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے ۔ تار کے نصف حصے ف ا کے ایک چھوٹے عنصر ج د پر غور کرو ۔ فرض کرو کہ زاویہ د و ا، طہ ہے اور زاویہ ج و ا، طہ + فرطہ ہے اور اسلئے اس عنصر کے محاذی مرکز پر زاویہ فرطہ بنتا ہے ۔ اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو تو اس عنصر کا طول ا فرطہ ہے، اس لئے اگر تار کی کمیت فی اکائی طول و ہو تو اس عنصر کی کمیت و ا فرطہ ہوگی ۔ یہ اور اس کے مشابہ عنصر جَ دَ جو تار



شکل (۶۹)

کے دوسرے نصف حصے میں ہے ملکر مساوی ذروں کا ایک زوج بناتے ہیں جن کا فاصلہ مرکزی خط و ا سے مساوی ہے ۔ ان کی بجائے کمیت ۲ و ا فرطہ کا ایک واحد ذرہ ان کے مرکز ثقل پر رکھا جا سکتا ہے ۔ یہ مرکز ثقل خط و ا میں اس نقطہ پر ہے جس پر ان دو عنصروں کو ملانیوالا خط، و ا کو قطع کرتا ہے ۔ اس لیے اس مرکز ثقل کا فاصلہ و سے ا جم طہ ہے ۔ اس کو لا سے اور کمیت ۲ و ا فرطہ کو ک سے تعبیر کرنے سے پورے تار کے مرکز ثقل کا فاصلہ (و سے) لا حسب ذیل مساوات سے حاصل

ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{\Sigma\ (ک\ لا)}{\Sigma\ (ک)}$$

$$= \frac{\int ا\ جم\ طہ\ (۲\ و\ ا\ فر\ طہ)}{\int ۲\ و\ ا\ فر\ طہ}$$

جہاں تکمل طہ = ۰ سے طہ = عہ تک ہے۔ مختصر کرنے سے (۱۲۶)

$$\bar{لا} = \frac{ا \int_{طہ=۰}^{طہ=عہ} جم\ طہ\ فر\ طہ}{\int_{طہ=۰}^{طہ=عہ} فر\ طہ}$$

$$= \frac{ا\ جب\ عہ}{عہ} \quad \text{. . . . . (۲۹)}$$

اِس سے مرکز ثقل کا محل معلوم ہوتا ہے۔

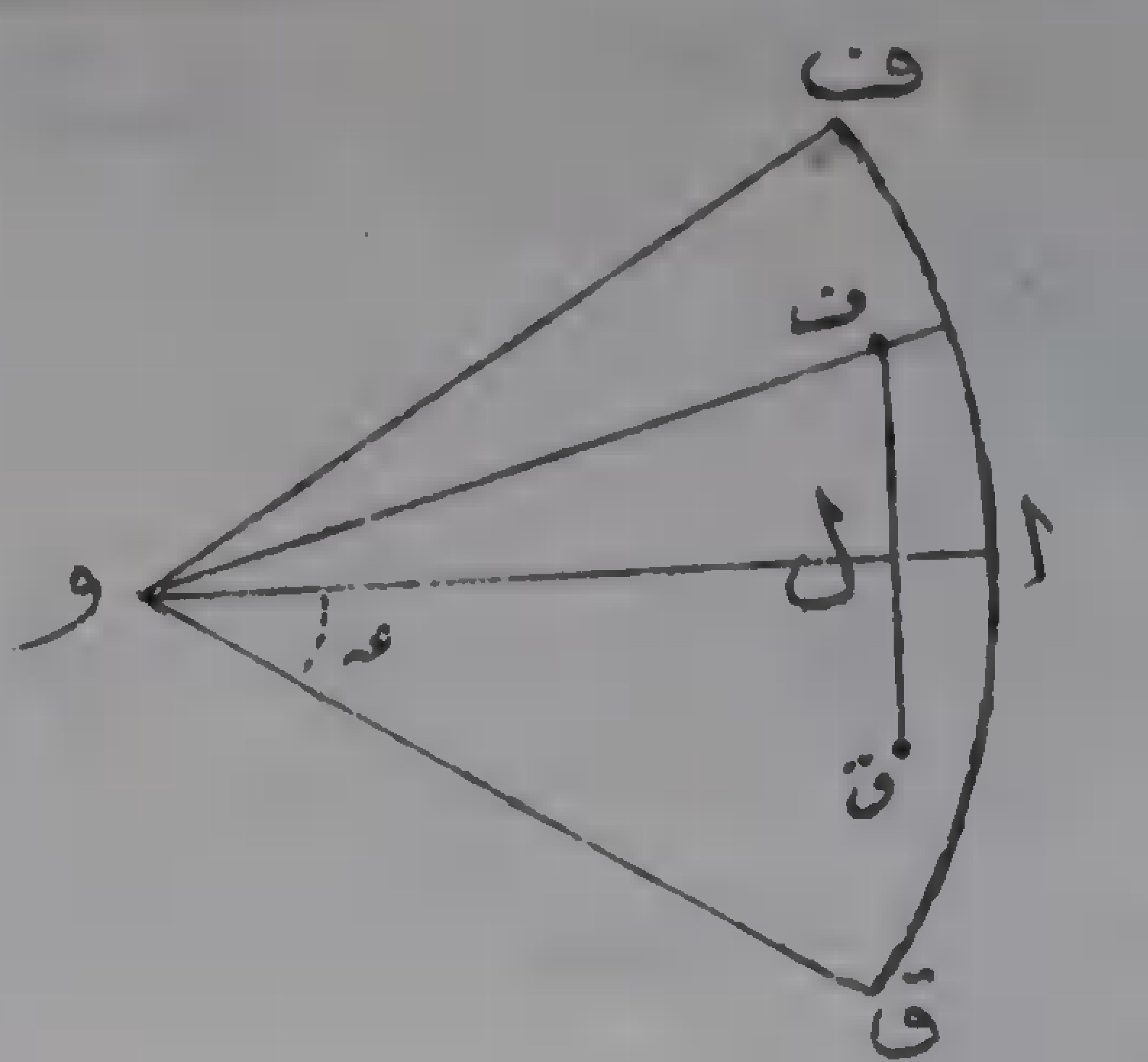
جب عہ بہت چھوٹا ہو تو جب عہ اور عہ مساوی ہوتے ہیں اور اِس لیے عہ کی بہت چھوٹی قیمتوں کے لیے ضابطہ (۲۹) $\bar{لا}$ = ا میں تحویل ہوتا ہے جیسا کہ ہونا چاہئے۔ اِس سے صرف یہ واضح ہوتا ہے کہ قوس کا انحناء جیسے جیسے گھٹتا ہے مرکز ثقل قوس کے وسطی نقطہ کے قریب اور قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ بالآخر جب عہ = ۰ تو قوس ایک سیدھا ڈنڈا بن جاتی ہے اور مرکز ثقل ٹھیک اِس کے وسطی نقطہ پر حاصل ہوتا ہے۔

اُس قوس کے لیے جو ایک نیم دائرے میں کھائی گئی ہو ہم عہ = $\frac{\pi}{۲}$ لیتے ہیں چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{ا\ جب\ \frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۲\ ا}{\pi} = ۰{\cdot}۶۳۶۶\ ا$$

۹۸ — دائری قوس ف ق کا مرکز ثقل تکملی احصار کے استعمال کے بغیر ایک دلچسپ طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ قوس اف کا مرکز ثقل اس نصف قطر میں واقع ہونا چاہیے جو زاویہ اوف کی تنصیف کرتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ مرکز ثقل ف ہے اور فرض کرو کہ قوس اق کا مرکز ثقل ق ہے۔ اب پوری قوس ف ق کا مرکز ثقل، ف ق کا نقطہ وسطی ل ہونا چاہئے۔



شکل (۷۰)

اب چونکہ زاویہ ف و ل = $\frac{1}{2}$ عہ

اس لیے

$$\text{و ل} = \text{و ف جم } \tfrac{1}{2} \text{ عہ}$$ (۱۲۷)

اس رشتہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

= جم $\frac{\text{عہ}}{2}$ × (قوس عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اسی طرح

(قوس عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

= جم $\frac{\text{عہ}}{4}$ × (قوس $\frac{\text{عہ}}{2}$ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طریقہ پر عمل جاری رکھ کر اور اندراج کر کے ہم حاصل کرتے ہیں

(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

= جم $\frac{\text{عہ}}{2}$ × جم $\frac{\text{عہ}}{4}$ × جم $\frac{\text{عہ}}{8}$ ...... جم $\frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}+1}}$

× (قوس $\frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}}}$ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اگر ہم ن کو بہت بڑا لیں تو $\frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}}}$ کی قیمت صفر ہوتی ہے۔ اس لئے

قوس $\frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}}}$ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے ا کے مساوی ہو جاتا ہے جو دائرہ کا

نصف قطر ہے۔ پس ن کو لا متناہی بنانے سے حاصل ہوتا ہے
(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

$$= \text{ا}\ \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۴}\ \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۸} \ldots\ldots \infty\ \text{تک}$$

اب

$$\text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۲} = \frac{\text{جب عہ}}{۲\ \text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{۲}}$$

$$\text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۴} = \frac{۲\ \text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{۲}}{۴\ \text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{۴}}\text{، وغیرہ}$$

اس لیے

$$\text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۴}\ \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۸} \ldots \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}} = \frac{\text{جب عہ}}{۲^{\text{ن}}\ \text{جب}\ \frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}}$$

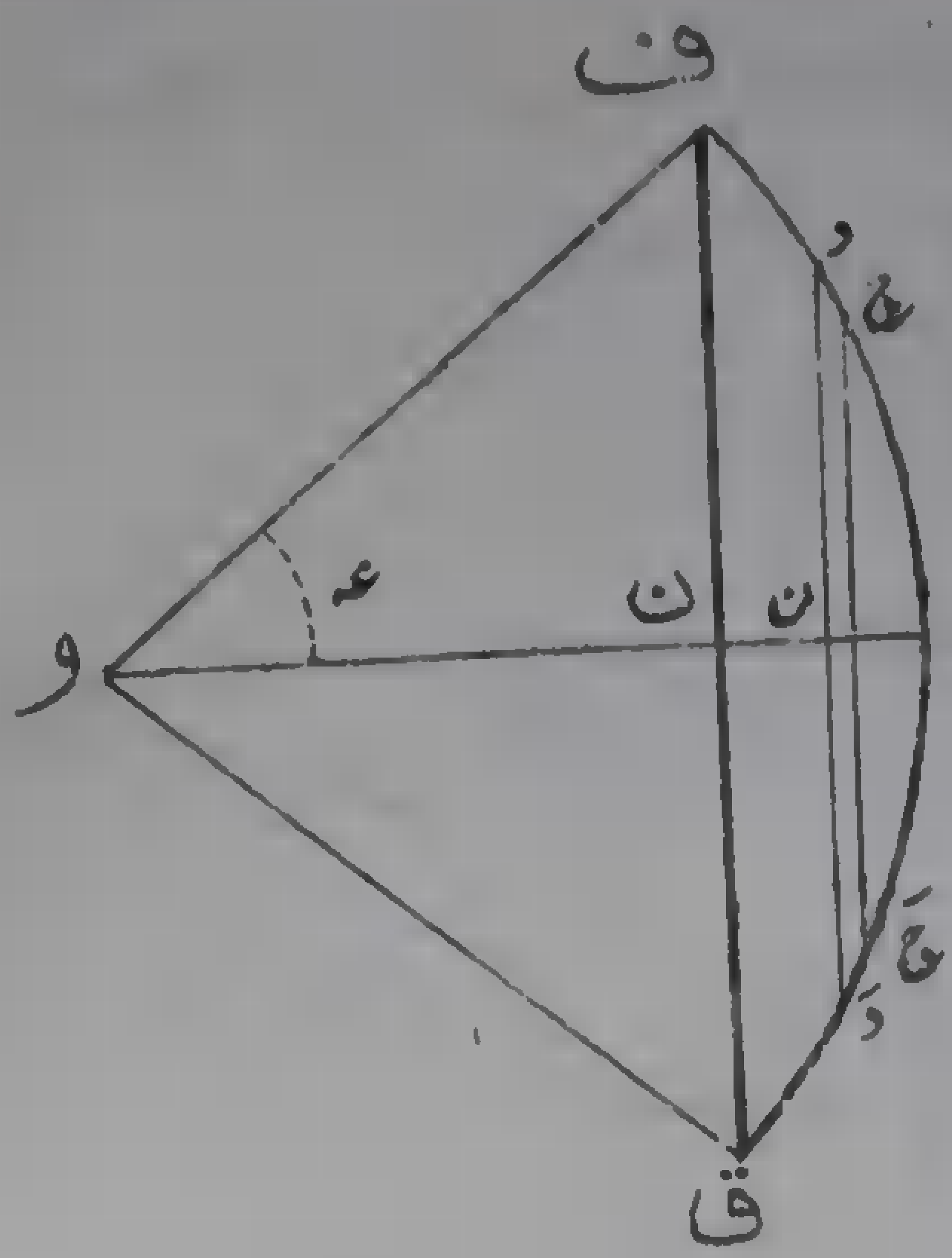
ن کو لا متناہی بنانے سے جب $\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}$ کی قیمت $\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}$ کے مماثل ہو جاتی ہے،
اس لیے $۲^{\text{ن}}$ جب $\frac{\text{عہ}}{۲^{\text{ن}}}$، عہ کے مماثل ہو جاتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۴}\ \text{جم}\ \frac{\text{عہ}}{۸} \ldots\ldots \infty\ \text{تک} = \frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$$

اس لئے قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے ($\frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$ ہے جو محصلہ نتیجہ کے مطابق ہے۔

۹۹ ـــ قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل - فرض کرو کہ ہم ایک دائرہ کے (۱۲۸)

قطعہ ف ا ق ن کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو وتر ف ن ق سے جس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے کٹتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پورے قطعہ کو اس وتر کے متوازی پتلی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور فرض کرو کہ شکل ۱۰ میں نمونے کی ایک پٹی ج ج' د د' ہے جو وتروں ج ج' اور د د' سے محدود ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ ج و ا، طہ ہے اور زاویہ د و ا، طہ + ف طہ ہے۔ ایک پٹی کا



شکل (۷۱)

عرض ج د جب طہ یا ا جب طہ فرطہ ہے اور اس کا طول ۲ ج ن یا ۲ ا جب طہ ہے - اس لئے رقبہ ۲ ا^{۲} جب^{۲} طہ فرطہ ہے - اس کی کمیت پوری کی پوری ن پر مرتکز سمجھی جا سکتی ہے جہاں ن کا فاصلہ مرکز و سے ا جم طہ ہے۔

اس طرح اگر پورے قطعہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ و سے لاَ ہو تو

$$\text{لاَ} = \frac{\int (\text{ا جم طہ})(\text{۲ ا}^{۲}\text{ جب}^{۲}\text{ طہ فرطہ})}{\int (\text{۲ ا}^{۲}\text{ جب}^{۲}\text{ طہ فرطہ})}$$

جہاں تکمل کو طہ = ۰ سے طہ = عہ تک لینا چاہئے - مختصر کرنے سے

$$\text{لاَ} = \text{ا}\ \frac{\int_{۰}^{\text{عہ}} \text{جب}^{۲}\text{ طہ جم طہ فرطہ}}{\int_{۰}^{\text{عہ}} \text{جب}^{۲}\text{ طہ فرطہ}}$$

$$= \text{ا}\ \frac{\frac{۱}{۳}\text{ جب}^{۳}\text{ عہ}}{\frac{۱}{۲}(\text{عہ} - \text{جب عہ جم عہ})}$$

$$= \frac{۲}{۳}\ \text{ا}\ \frac{\text{جب}^{۳}\text{ عہ}}{\text{عہ} - \text{جب عہ جم عہ}}$$

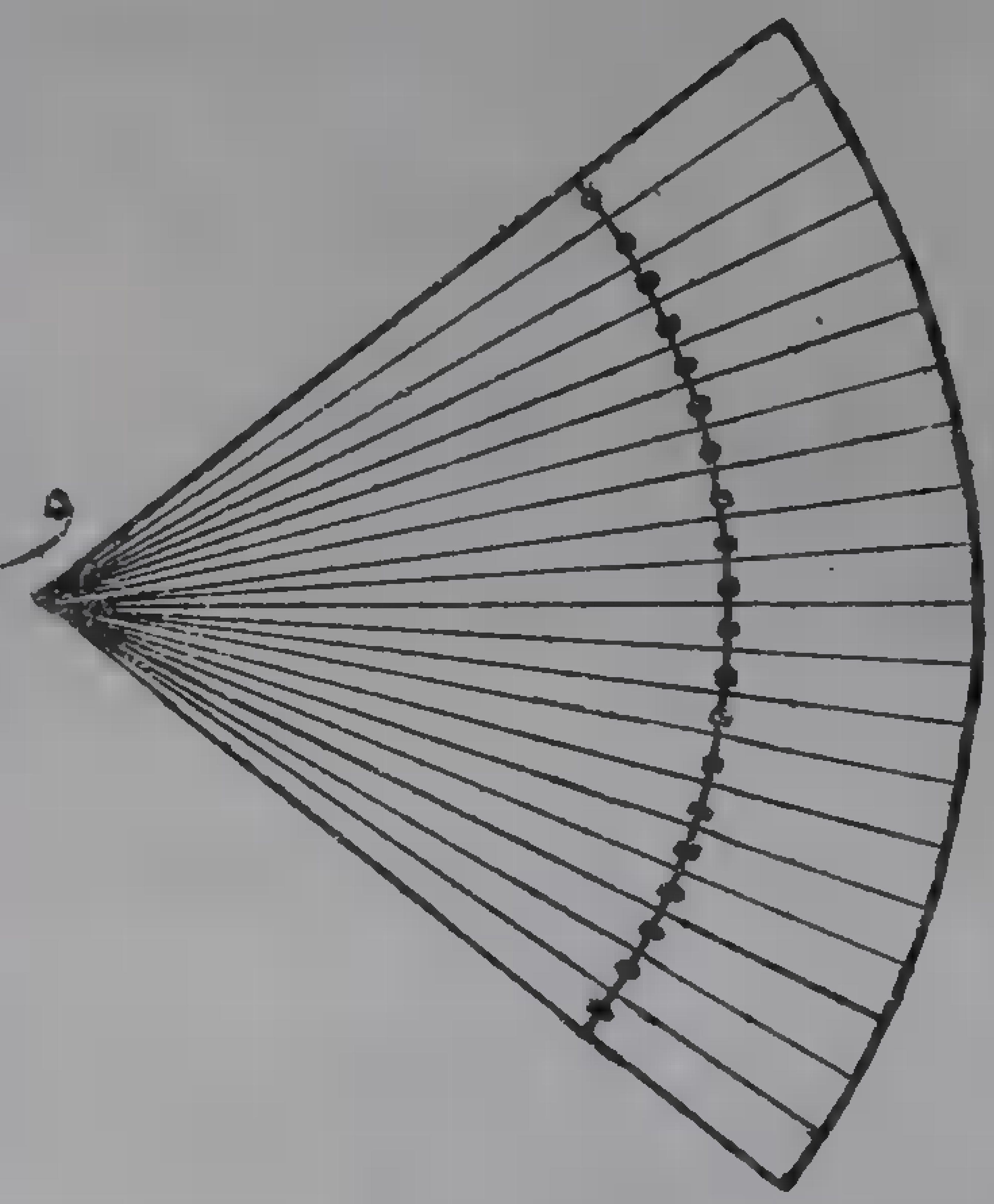
(۱۲۹) عہ = $\frac{\pi}{۲}$ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک نیم دائرہ کا مرکز ثقل، مرکز سے فاصلہ $\frac{۴}{۳\pi}$ ا پر ہوتا ہے -

۱۰۰ — قطاع دائرہ کا مرکز ثقل -

قطاع دائرہ کے مرکز ثقل کو اس طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ قطاع دائرہ کو ایک مثلث اور ایک قطعہ دائرہ سے بنا ہوا سمجھا جائے -

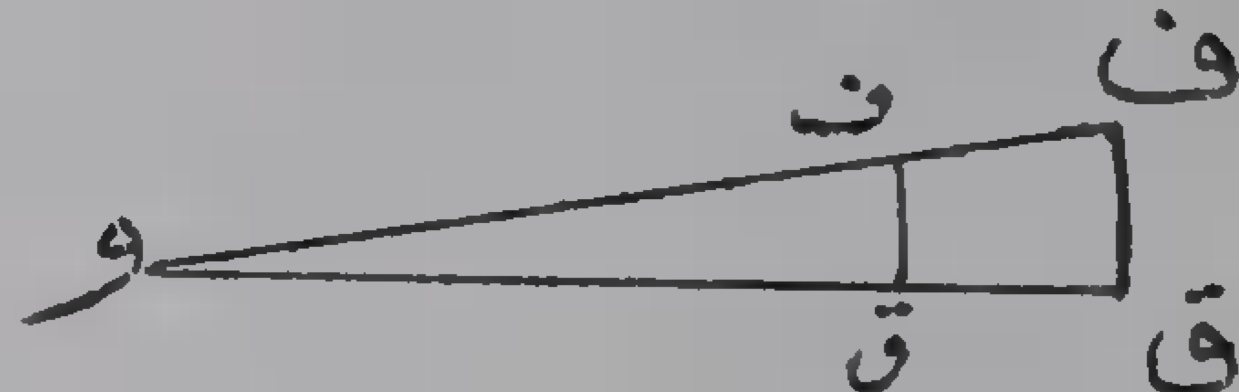
اب چونکہ مثلث کا مرکز ثقل اور قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل معلوم کئے جا سکتے ہیں اس لئے پوری شکل کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے۔

اِس سے سادہ طریقہ حسب ذیل ہے۔ ہم قطاع دائرہ کو نصف قطروں کے ایک سلسلہ کے ذریعہ بہت تنگ مثلثوں کی ایک بڑی تعداد میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ ہر مثلث کے وزن کی بجائے اِس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھا جا سکتا ہے جس کا وزن مثلث کے وزن کے مساوی ہو۔ اب انتہا میں جبکہ مثلث صغیر عرض کے ہو جاتے ہیں ہر ایک کا مرکز ثقل اِس کے خط وسطی پر دائرہ کے مرکز سے $\frac{2}{3}$ ا فاصلہ پر ہوگا جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے تمام ذرے $\frac{2}{3}$ ا نصف قطر کے ایک دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔



شکل (۷۲)

کسی ذرہ کا وزن اُس مثلث و ف ق کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے جس کی بجائے اُس کو رکھا گیا ہے۔ اِس لیے اس کو مثلث کے قاعدہ ف ق کے متناسب ہونا چاہئے اور پھر یہ ف ق کے متناسب ہے جو نصف قطر $\frac{2}{3}$ ا کے دائرہ کا ایک ٹکڑا ہے جو مثلث کے اندر ہے۔ اس طرح اُس ذرہ کا وزن جس کو اس دائرہ کے چھوٹے عنصر ف ق میں رکھنا ہے طول ف ق کے متناسب ہے۔ انتہا لینے اور مثلثوں کی تعداد کو لامتناہی بنانے سے



شکل (۷۳)

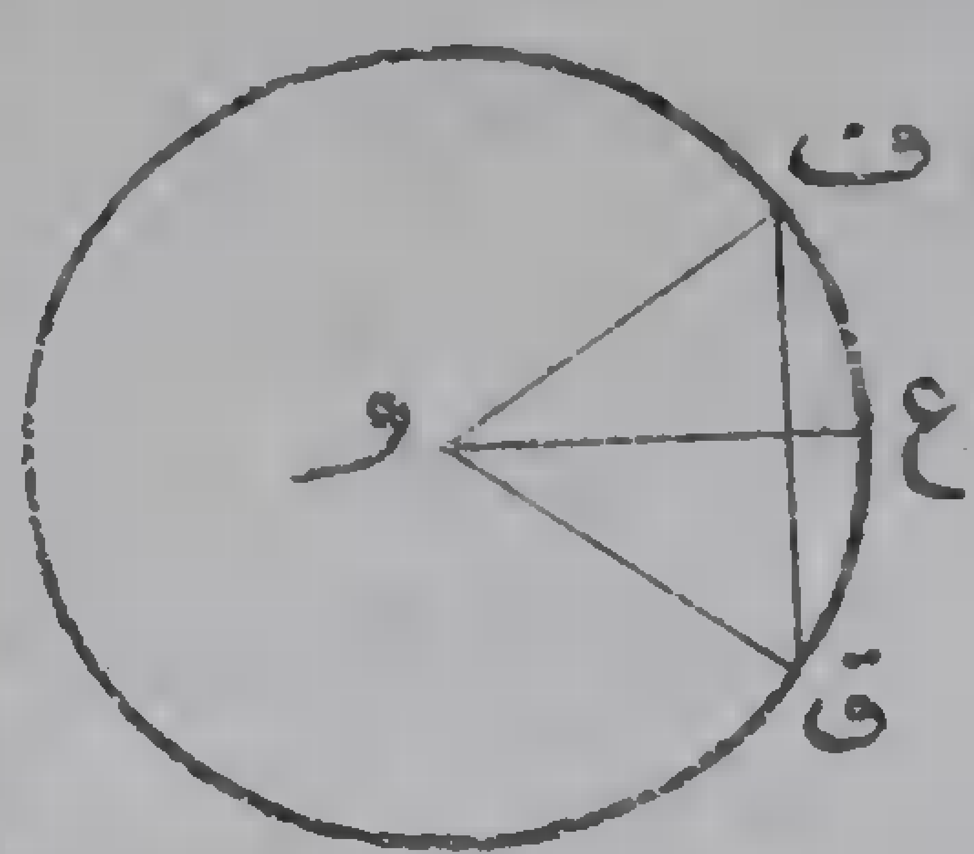
ہم معلوم کرتے ہیں کہ ذروں کی اِس لڑی کی بجائے ایکساں کثافت کا ایک تار رکھا جا سکتا ہے۔ ایسے تار کا مرکز ثقل پہلے معلوم کیا جا چکا ہے۔ اگر تار کا زاویہ ۲ عہ ہو تو مرکز ثقل اُس نصف قطر پر جو تار کے وسطی نقطہ میں سے گذرتا ہے مرکز سے فاصلہ $\frac{۲}{۳}$. ا $\frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$ پر واقع ہے۔ (۱۳۰)

اس طرح نصف قطر ا اور زاویہ ۲ عہ کے ابتدائی قطاع دائرہ کا مرکز ثقل قطاع دائرہ کے مرکزی محور پر مرکز سے فاصلہ $\frac{۲}{۳}$ ا $\frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$ پر واقع ہے۔

۱۰۱۔ کروی ٹوپی کا مرکز ثقل

وہ ٹکڑا جس کو ایک کروی خول سے ایک مستوی کے ذریعہ کاٹ لیا جائے کروی ٹوپی کہلاتا ہے۔

کروی ٹوپی کا مرکز ثقل جس کو ایک ایکساں کروی خول سے کاٹ لیا گیا ہو اُن طریقوں سے جو قبل ازیں سمجھائے جا چکے ہیں بہت آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

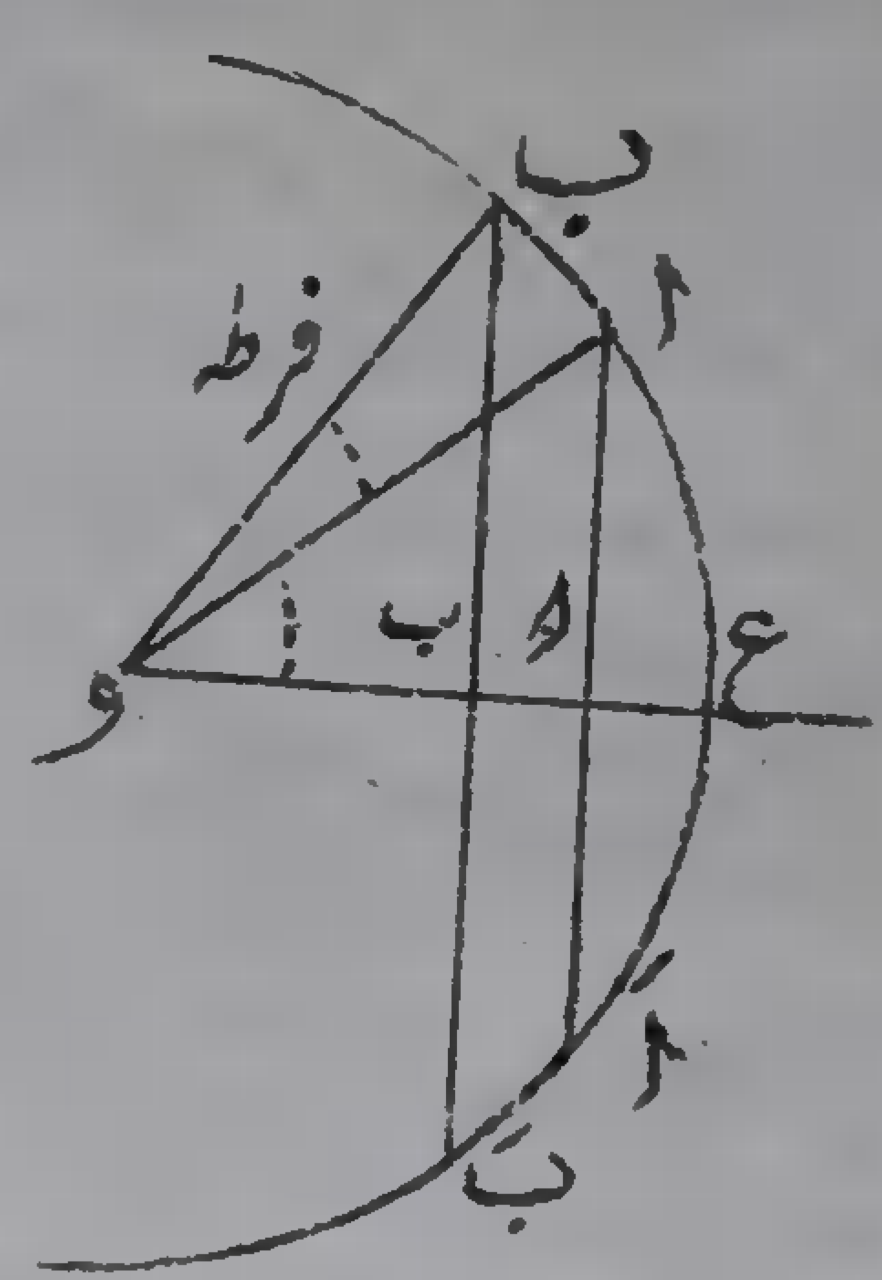


شکل (۴۷)

فرض کرو کہ ف ق کروی ٹوپی ہے اور و اُس کرہ کا مرکز ہے جس سے یہ ٹوپی کاٹی گئی ہے۔ فرض کرو کہ و ع وہ نصف قطر ہے جو مستوی ف ق پر جس سے ٹوپی محدود ہے عمود ہے اور فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ا ہے۔

کوئی مستوی جو ف ق کے متوازی ہے کرہ کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز و ع پر واقع ہو گا قطع کریگا۔ اس لیے ف ق کے متوازی مستویوں کی ایک بڑی تعداد لینے سے ہم کروی ٹوپی کو تنگ دائری حلقوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا مرکز و ع پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ہم

ایک واحد حلقہ پر جو سُتویوں ا ا اَ، ب ب بَ سے منقطع ہوا ہے غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ زاوئے ا و ع، ب و ع علی الترتیب طہ اور طہ + فرطہ کے مساوی ہیں اس لیے حلقہ کے محاذی مرکز پر زاویہ فرطہ بنتا ہے۔ حلقہ کا عرض ا ب، ا فرطہ ہے۔ اِس کے محیط کو انتہا میں دائرہ ا ا اَ کے محیط کے مساوی فرض کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ ا ا = ا جب طہ اس لیے یہ محیط = ۲ π ا جب طہ



شکل (۷۵)

(۱۳۱) اِس لیے زیر بحث حلقہ کو طول ۲ π ا جب طہ اور عرض ا فرطہ کی ایک تنگ پٹی سمجھا جا سکتا ہے۔ اِس لیے اِس کا رقبہ ۲ π ا² جب طہ فرطہ ہے۔

جب، فرطہ کو بہت چھوٹا بنایا جاتا ہے تو قوس ب ا کو طول ا فرطہ کا ایک خط مستقیم خیال کیا جا سکتا ہے جو و ع کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ - طہ بناتا ہے۔ اِس طرح و ع پر ب ا کے ظِل ب ا کا طول ا فرطہ جم ($\frac{\pi}{2}$ - طہ) یا ا جب طہ فرطہ ہے۔ حلقہ ب ا کا رقبہ اب حسب ذیل حاصل ہوتا ہے

۲ π ا² جب طہ فرطہ

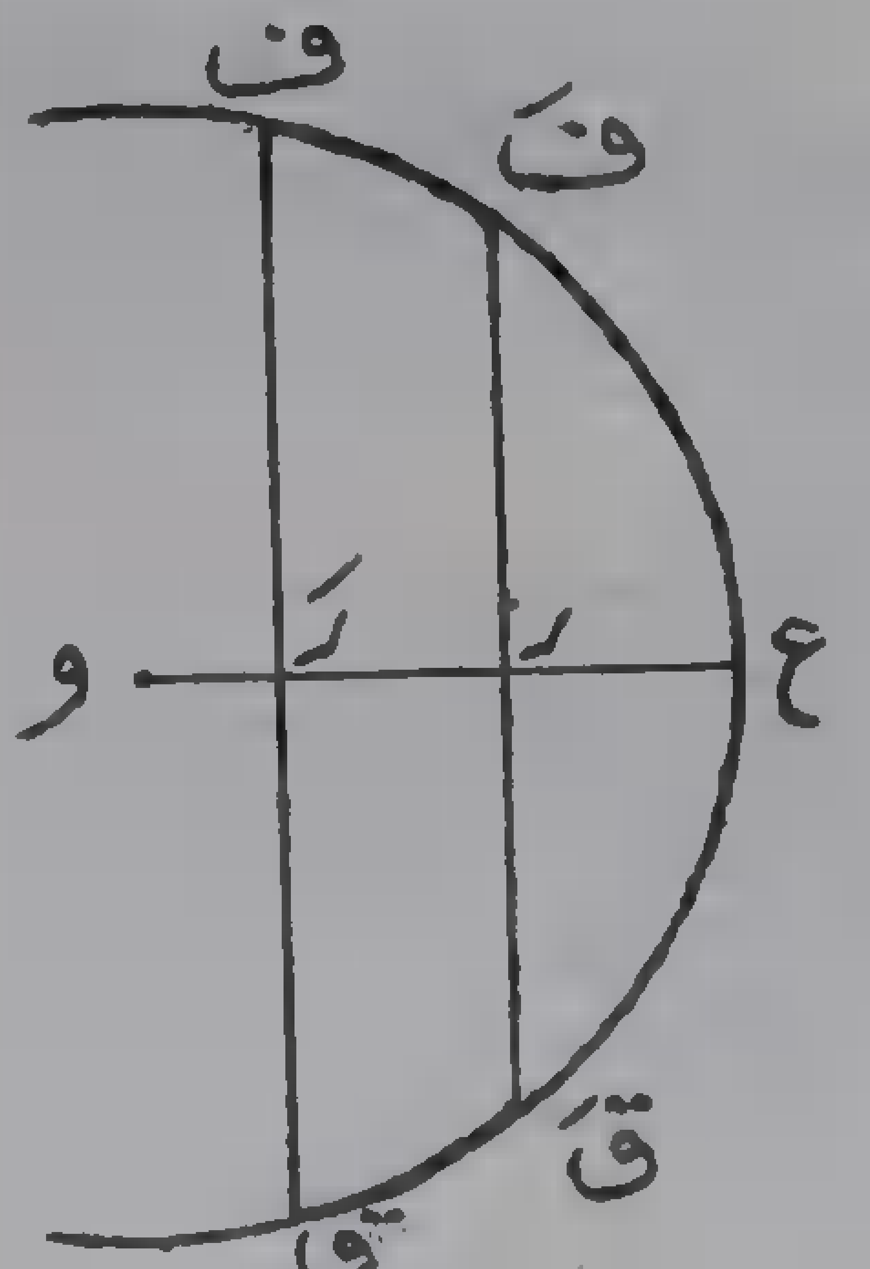
یا ۲ π ا × ب ا

اِس لیے حلقہ کی کمیت وہی ہے جو ڈنڈے و ع کے عنصر ب ا کی ہے بشرطیکہ یہ ڈنڈا ایکساں کثافت کا ہو اور اُس کی کمیت فی اکائی طول خول کے رقبہ ۲ π ا کی کمیت کے مساوی ہو۔ اُس حلقہ کا مرکز ثقل جس پر ہم غور کر رہے ہیں صریحاً محور و ع پر واقع ہے، اس لئے کروی ٹوپی کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں اس حلقہ کی بجائے اِس ڈنڈے کے عنصر ب ا کو رکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح ہر چھوٹے حلقہ کی بجائے ڈنڈے کا متناظر عنصر رکھا جا سکتا ہے ۔ اس طرح پوری ٹوپی کی بجائے ڈنڈے کے طول ر ع کو رکھا جا سکتا ہے (شکل (۷۴) جو حدی مستوی ف ق اور کرہ کے درمیان قطع ہوتا ہے ۔ چونکہ ڈنڈا یکساں ہے ڈنڈے کے حصہ ر ع کا مرکز ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہے ۔ اس لیے یہ نقطہ کروی ٹوپی کا مرکز ثقل ہے ۔

۱۰۲ ۔ ایک پیٹی کا مرکز ثقل جو ایک کروی خول سے دو متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹی گئی ہو ۔

اسی طریقہ سے ہم اس پیٹی کا مرکز ثقل معلوم کر سکتے ہیں جو ایک یکساں کروی خول سے دو متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹ لی گئی ہو ۔ شکل ۷۶ میں فرض کرو کہ ف ق، فَ قَ دو مستوی ہیں ۔ اب ہم ف ق کے متوازی مستویوں سے پیٹی کو تنگ حلقوں میں تقسیم کر سکتے ہیں ۔ ہر حلقہ کی بجائے حسب سابق ایک یکساں ڈنڈے کے متناظر عنصر کو محور و ع پر رکھا جا سکتا ہے اور اس لیے پوری پیٹی کی بجائے اس ڈنڈے کے حصہ ر رَ کو رکھا جا سکتا ہے جو وہ حصہ ہے جو دو مستویوں ف ق اور فَ قَ کے درمیان منقطع ہوتا ہے ۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل، ر رَ کا وسطی نقطہ ہے ۔



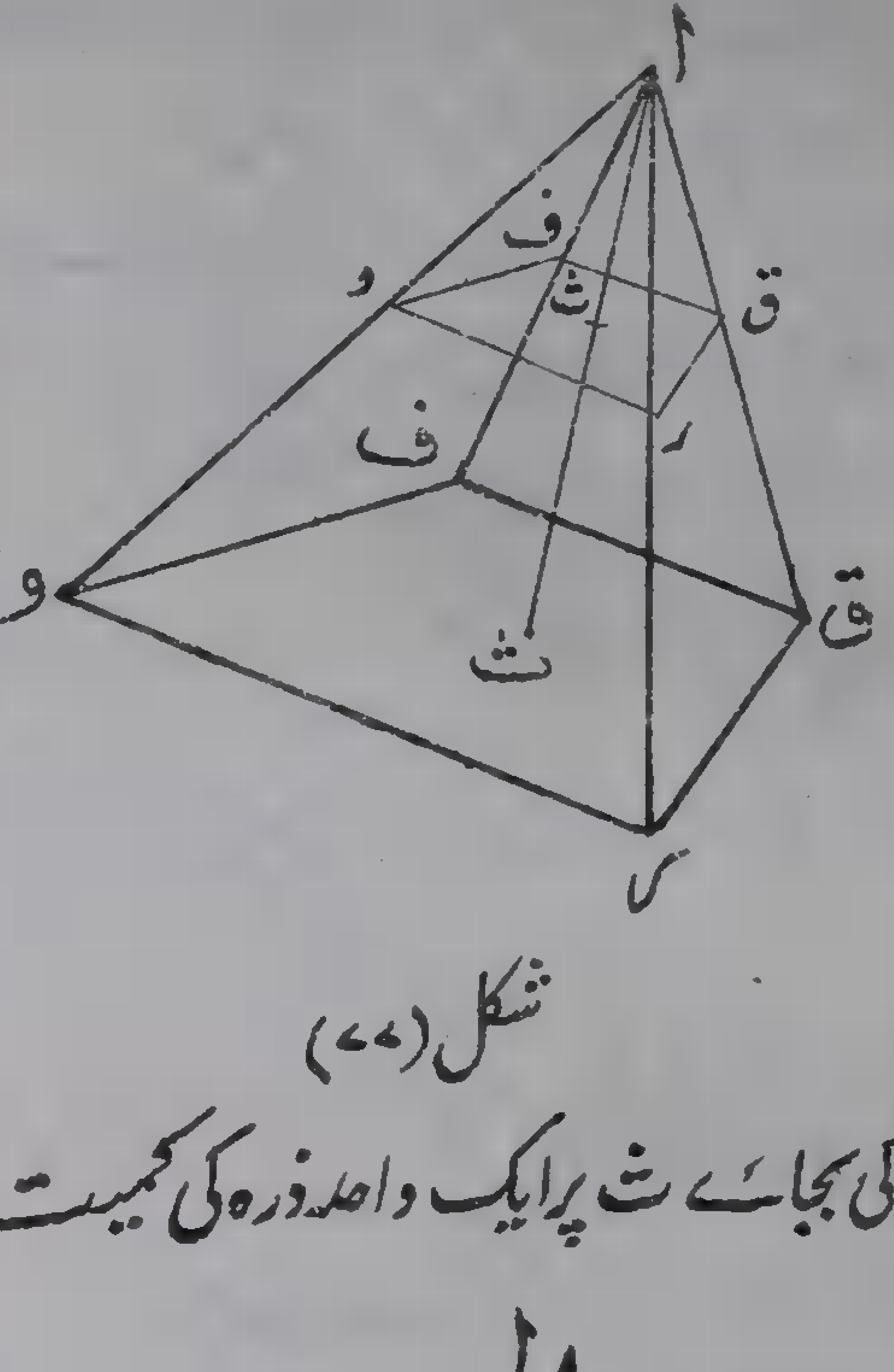
شکل (۷۶)

ایک ٹھوس جسم کا مرکز ثقل (۱۳۲)

۱۰۳ ۔ مستوی قاعدے کے ایک مخروط مضلع کا مرکز ثقل ۔

فرض کرو کہ ایک مخروط مضلع کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کا قاعدہ و ف ق ر کوئی مستوی شکل ہے اور اس کا راس ا ہے۔ ہم کسی متجانس مخروط مضلع کے مرکز ثقل کو معلوم کرنے کے لیے اس کو اسکے قاعدے کے متوازی مستویوں کے ایک سلسلے کے ذریعہ پتلے طبقوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

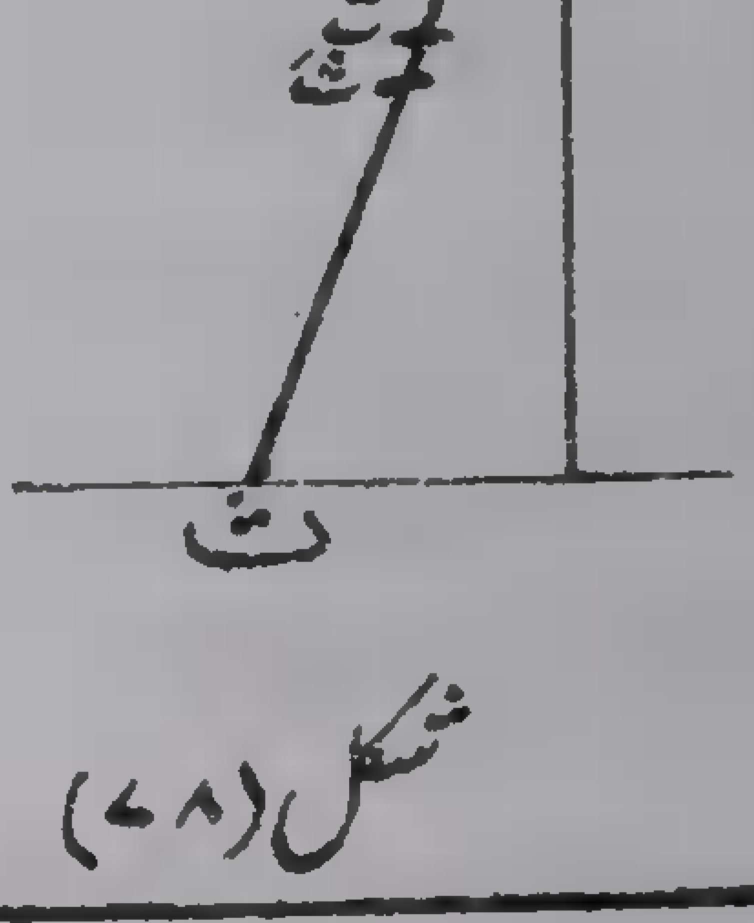
فرض کرو کہ ایسا کوئی متوازی طبقہ وف ق ر ہے، اس طبقہ کے متعلق یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ لا انتہا پتلا پترا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ایکساں پترے کا مرکز ثقل جو قاعدہ و ف ق ر پر منطبق ہوتا ہے ث ہے اور فرض کرو کہ اث پترے وف ق ر سے ث پر ملتا ہے۔ اب متشابہ اشکال کے علم ہندسہ سے یہ ظاہر ہے کہ پترے و ف ق ر میں ث ایک ایسا محل اختیار کرتا ہے جو ٹھیک طور پر اس محل کے متناظر ہے جو پترے و ف ق ر میں نقطہ ث کا ہے۔ اس لیے پترے وف ق ر کا مرکز ثقل ث ہے



شکل (۷۷)

اور اس لیے اس پترے کی کمیت کی بجائے ث پر ایک واحد ذرہ کی کمیت رکھی جا سکتی ہے۔

اسی طرح سے مخروط مضلع کو جتنے پتروں میں تقسیم کیا گیا ہے ان میں سے ہر ایک کی بجائے ایک واحد ذرہ اس نقطہ پر رکھا جا سکتا ہے جس پر یہ پترا خط اث کو قطع کرتا ہے۔ اس طرح پورے



شکل (۷۸)

مخروط مضلع کی بجائے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ذروں کا ایک سلسلہ خط
ا ث پر رکھا گیا ہے۔ یہ ذرے متغیر کثافت کا ایک ڈنڈا بناتے ہیں
اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اس ڈنڈے کے مرکز ثقل پر منطبق ہوگا۔

اب ڈنڈے کا مرکز ثقل اس طریقہ سے جس کی صراحت دفعہ ۹۴ میں
کی جا چکی ہے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس پترے پر غور کرو جو متصلہ متوازی
پتروں کے درمیان واقع ہے جبکہ یہ پترے خط ا ث کو علی الترتیب ث، ثَ (۱۴۳)
پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ا ث = لا، اور ا ثَ = لا + فرلا، چنانچہ
یہ پترا خط ا ث پر طول فرلا قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ا ث اور اس عمود کے درمیان جو ا سے پترے کے
قاعدے پر کھینچا گیا ہے زاویہ طہ بنتا ہے۔ اس لیے پترے کی موٹائی

= ث ثَ جم طہ = فرلا جم طہ

اگر مخروط مضلع کے قاعدہ کا رقبہ س ہو تو زیر بحث پترے کا رقبہ

$$= \frac{\text{لا}^2}{\text{اث}^2}\,\text{س}$$

کیونکہ مختلف پتروں کے رقبے اُن کے خطی ابعاد کے مربعوں کے متناسب
ہیں۔ اس لیے زیر غور پترے کا حجم

$$= \frac{\text{لا}^2}{\text{اث}^2}\,\text{س فرلا جم طہ}$$

اگر اس پترے کی بجائے ایک ذرہ رکھا جائے جو ڈنڈے ا ث
کے طول فرلا پر ہو تو ڈنڈے کی کثافت ثہ ہونی چاہیے

$$\text{ثہ} = \text{لا}^2\,\frac{\text{س جم طہ}}{\text{اث}^2}$$

اس طرح ڈنڈا ا ث ایسی کثافت کا ہونا چاہیے جو سرے (ا)
سے فاصلہ (لا) کے مربع کے متناسب ہے۔

اب دفعہ ۹۴ کے ضابطہ کی رُو سے اس ڈنڈے کے مرکز ثقل کا

فاصلہ (لاَ) نقطہ ا سے حسب ذیل ہے:

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{ک}_{\text{ا}}^{\text{ث}}\ \text{ثہ لا فرلا}}{\text{ک}_{\text{ا}}^{\text{ث}}\ \text{ثہ فرلا}}$$

$$= \frac{\text{ک}_{\text{ا}}^{\text{ث}}\ \text{لا}^{۳}\ \text{فرلا}}{\text{ک}_{\text{ا}}^{\text{ث}}\ \text{لا}^{۲}\ \text{فرلا}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۴}\ \text{اث}^{۴}}{\frac{۱}{۳}\ \text{اث}^{۳}}$$

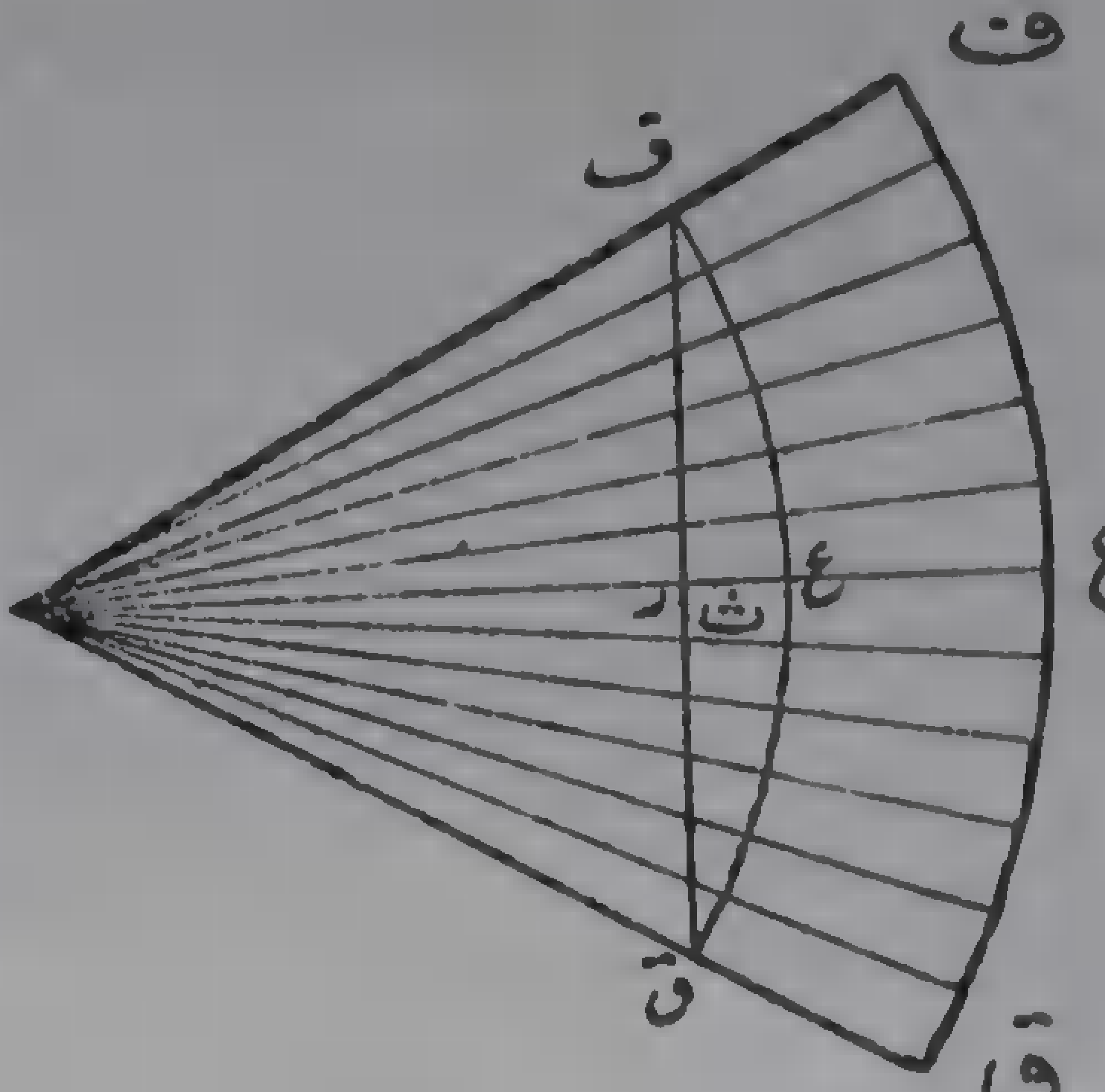
$$= \frac{۳}{۴}\ \text{اث}$$

اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل، اث میں نقطہ ا سے اث کے (۱۳۴)
طول کے تین چوتھائی فاصلہ پر ہے۔

۱۰۴ ۔ ایک کرہ کے قطاع کا مرکز ثقل ۔

اب ہم ایک کرہ کے قطاع کا مرکز ثقل معلوم کر سکتے ہیں یعنے اُس حجم کا جو ایک ٹھوس کرہ میں سے قائم مستدیر مخروط سے جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہو قطع کر لیا گیا ہو۔ اس مقصد کے لیے ہم قطاع کے قاعدہ ف ق کے رقبہ کو بہت چھوٹے چھوٹے عنصروں میں تقسیم کرتے ہیں اور اس طرح رقبہ کے ان عنصروں کو قاعدے مان کر اور ان کو مشترک راس و سے ملا کر قطاع کے حجم کو بہت چھوٹی عمودی تراش کے متعدد مخروط مضلع میں تقسیم کرتے ہیں۔ یہ سب مخروط مضلع ایک ہی ارتفاع کے ہیں اور اس لیے ان کی کمیتیں ان کے قاعدوں کے متناسب ہیں۔ ہر مخروط مضلع کا مرکز ثقل، و سے اُس فاصلہ کے تین چوتھائی پر واقع ہے جو و اور اس مخروط مضلع کے قاعدہ کے درمیان ہے اور اس لیے و سے ایک ایسے فاصلہ پر واقع ہے جو کرہ کے نصف قطر کے تین چوتھائی کے برابر ہے۔ پس اگر ہم ایک اور

کرہ بنائیں جس کا مرکز و ہو اور جس کا قطر ابتدائی کرہ کے نصف قطر کا تین چوتھائی ہو تو ہر چھوٹے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اس نئے کرہ کی سطح پر واقع ہوگا۔ اب ہر مخروط مضلع کی بجائے اس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھا جا سکتا ہے اور اس لیے کل کروی قطاع کی بجائے ذروں کا ایک سلسلہ رکھا جا سکتا ہے جو اس نئے کرہ پر



شکل (۷۹)

واقع ہوں گے اور ان سے کروی ٹوپی ف ع ق بنے گی (دیکھو دفعہ ۹۷) ہر مخروط مضلع کی کمیت قاعدے کے متناسب ہے اور نیز کروی خول ف ع ق کے اس حصہ کے متناسب ہے جو مخروط مضلع سے منقطع ہوتا ہے۔ اس لیے کروی خول ف ع ق جسکو اصلی حجم کی بجائے لینا ہے یکساں کثافت کا ہونا چاہیئے۔

(۱۳۵) اب کرہ کے قطاع و ف ق کی بجائے یکساں کروی خول ف ق ہے اور اس کروی خول کا مرکز ثقل ث معلوم ہے جو شکل (۷۹) میں ر ع کا وسطی نقطہ ہے۔ اس لئے یہ نقطہ ث مطلوبہ مرکز ثقل ہے۔

اگر مخروط کا انتصابی زاویہ جس سے قطاع محدود ہے ۲ عہ ہو اور کرہ کا نصف قطر ا ہو تو

و ع = $\frac{۳}{۴}$ ا، و ر = $\frac{۳}{۴}$ ا جم عہ

اس لیے و ث = $\frac{۳}{۸}$ ا (۱ + جم عہ)

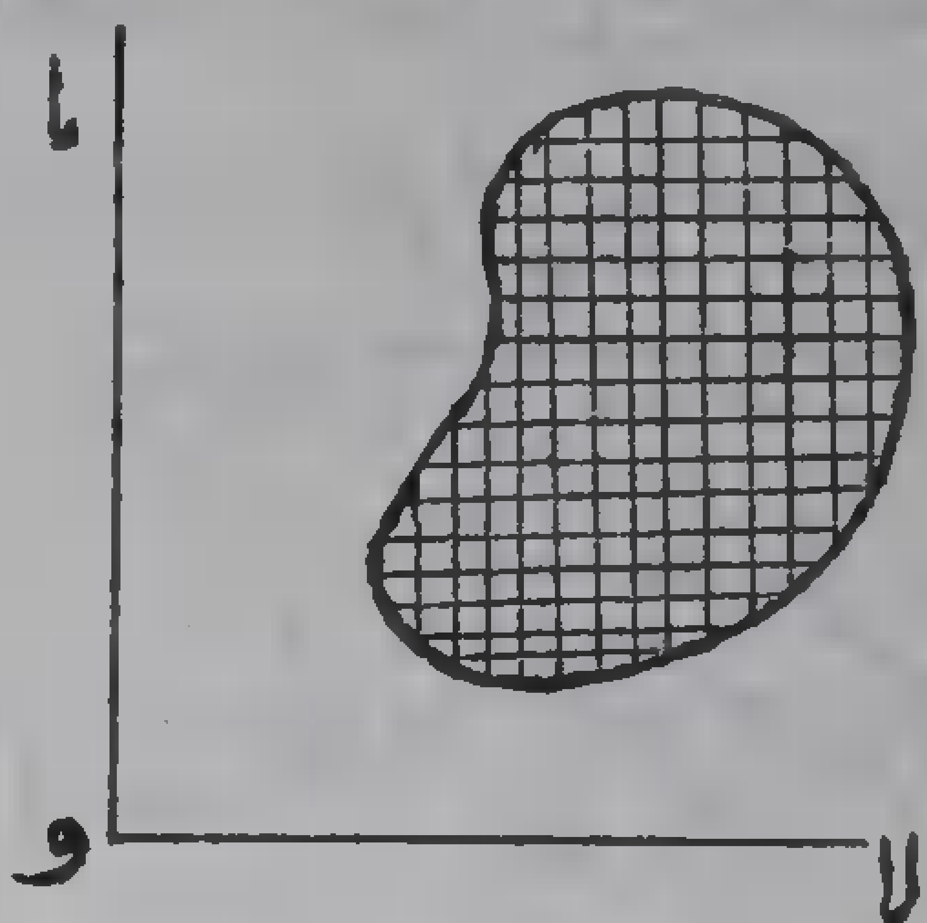
مخصوص صورت میں اگر عہ = $\frac{\pi}{۲}$ تو قطاع نیم کرہ ہو جاتا ہے

اور و ث = $\frac{۳}{۸}$ ا

اِس طرح نیم کرہ کا مرکز ثقل اُس نصف قطر پر جو اِس کے قاعدہ پر عمود ہے مرکز سے نصف قطر کے $\frac{۳}{۸}$ فاصلہ پر واقع ہوتا ہے۔

اُن رقبوں اور حجموں کے مرکز ثقل جو راست تکمل سے حاصل ہوں

۱۰۵ ــ پترے کا مرکز ثقل۔ کسی شکل کے پترے کا مرکز ثقل تکمل کے ذریعہ معلوم کرنے میں ہم پترے کے مستوی میں محوروں و لا، و ما کا کوئی سہولت بخش جٹ لیتے ہیں اور یہ خیال کرتے ہیں کہ پترا خطوں کے دو سلسلوں سے جن میں سے ایک محور و لا کے متوازی اور دوسرا محور و ما کے متوازی ہے چھوٹے عناصر میں منقسم ہے۔



شکل (۸۰)

اُس چھوٹے مستطیلی عنصر پر غور کرو جس میں لا کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو و ما کے متوازی ہیں لا اور لا + فرلا ہیں اور ما کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو و لا کے متوازی ہیں ما اور ما + فرما ہیں۔

اِس عنصر کا رقبہ فرلا فرما ہے اور اس لئے اگر اِس نقطہ پر پترے کے فی اکائی رقبہ کی کمیت ثہ ہو تو اس عنصر کی کمیت ثہ فرلا فرما ہو گی۔ مزید برین جب فرلا، فرما کو لا انتہا چھوٹا بنایا جاتا ہے تو انتہا میں اِس کمیت کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔ اسلیے پترے کی کل کمیت کو متعدد ذروں کی کمیتیں سمجھا جا سکتا ہے۔

دفعہ ۸۶ میں ہم نے ذروں کے مرکز ثقل کے لیے حسب ذیل ضابطے (۱۳۶) حاصل کئے تھے:

$$\bar{لا} = \frac{\Sigma\ ک\ لا}{\Sigma\ ک}،\quad \bar{ما} = \frac{\Sigma\ ک\ ما}{\Sigma\ ک}$$

موجودہ صورت میں یہ ضابطے ہو جاتے ہیں

لاَ = (∫∫ ثہ لا فرلا فرما) / (∫∫ ثہ فرلا فرما) ، ماَ = (∫∫ ثہ ما فرلا فرما) / (∫∫ ثہ فرلا فرما) ..... (۳۰)

علامت جمع Σ کی بجائے تکمل کی علامتیں ہیں اور تکمل کو پترے کے پورے رقبہ پر لینا ہوگا۔

اگر پترا یکساں ہے تو ثہ کی قیمت مستقل ہے اور اس لیے

∫∫ ثہ لا فرلا فرما = ثہ ∫∫ لا فرلا فرما

اور علیٰ ہذا القیاس ۔ اس لئے مندرجہ بالا ضابطوں کو ثہ پر تقسیم کرنے سے یہ ضابطے حسب ذیل ضابطوں میں تحویل ہوتے ہیں :

لاَ = (∫∫ لا فرلا فرما) / (∫∫ فرلا فرما) ، ماَ = (∫∫ ما فرلا فرما) / (∫∫ فرلا فرما)

۱۰۶ ۔ ٹھوس جسم کا مرکز ثقل ۔ کسی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں ہم جسم کو مستویوں کے تین نظاموں کے ذریعہ جو محددوں کے تین مستویوں کے متوازی ہوں چھوٹے ٹھوس عناصر میں تقسیم کرتے ہیں تب کسی چھوٹے عنصر کا حجم فرلا فرما فری ہوگا۔ پس دفعہ ۸۶ کے ضابطوں سے جسم کے مرکز ثقل کے محدد حسب ذیل شکل میں حاصل ہوتے ہیں :

لاَ = (∫∫∫ ثہ لا فرلا فرما فری) / (∫∫∫ ثہ فرلا فرما فری) ، ماَ = (∫∫∫ ثہ ما فرلا فرما فری) / (∫∫∫ ثہ فرلا فرما فری) ،

یَ = (∫∫∫ ثہ ی فرلا فرما فری) / (∫∫∫ ثہ فرلا فرما فری) ، .... (۳۱)

اگر جسم متجانس ہے تو ثہ مستقل ہے اور ضوابط ہو جاتے ہیں (۱۳۷)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int\int\int \text{لا فرلا فرما فری}}{\int\int\int \text{فرلا فرما فری}} ، \quad \bar{\text{ما}} = \frac{\int\int\int \text{ما فرلا فرما فری}}{\int\int\int \text{فرلا فرما فری}} ، \text{ وغیرہ}$$

۱۰۷ ـ قطبی محددوں کا استعمال ـ تکمل کے ذریعہ مرکز ثقل معلوم کرنے میں محددوں کا کوئی اور نظام استعمال کیا جا سکتا ہے۔ کارٹیزی محددوں کے علاوہ جو محدد اِس مقصد کے لیے زیادہ مفید ہیں وہ صرف قطبی محدد ہیں۔

کسی پتری کے مرکز ثقل کو قطبی محددوں میں یہ فرض کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ کارٹیزی محددوں لا، ما اور قطبی محددوں ر، طہ میں حسب ذیل روابط موجود ہیں:

$$\text{لا} = \text{ر جم طہ} ، \quad \text{ما} = \text{ر جب طہ}$$

پس اِن اندراجات سے ضوابط (۳۰) ہو جاتے ہیں

$$\bar{\text{ر}}\,\text{جم}\,\bar{\text{طہ}} = \frac{\int\int \text{ثہ (ر جم طہ)(ر فرر فرطہ)}}{\int\int \text{ثہ (ر فرر فرطہ)}}$$

$$= \frac{\int\int \text{ثہ}\ \text{ر}^2\ \text{جم طہ فرر فرطہ}}{\int\int \text{ثہ ر فرر فرطہ}} ،$$

$$\bar{\text{ر}}\,\text{جب}\,\bar{\text{طہ}} = \frac{\int\int \text{ثہ (ر جب طہ)(ر فرر فرطہ)}}{\int\int \text{ثہ (ر فرر فرطہ)}}$$

$$= \frac{\int\int \text{ثہ}\ \text{ر}^2\ \text{جب طہ فرر فرطہ}}{\int\int \text{ثہ ر فرر فرطہ}}$$

جن میں رَ، طَہ، مرکز ثقل کے قطبی محددین ہیں۔ اِن مساواتوں کی متناظر طرفوں کو تقسیم کرنے سے مساوات

مس طَہ = (∫∫ ثہ ر² جب طہ فر ر فر طہ) / (∫∫ ثہ ر² جم طہ فر ر فر طہ)

حاصل کیجا سکتی ہے جس سے صرف محدد طَہ معلوم ہو سکتا ہے۔

اسی طرح ہم کسی ٹھوس جسم کے مرکز ثقل کو قطبی محددوں میں یہ فرض کر کے معلوم کر سکتے ہیں کہ کارٹیزی محددوں لا، ما، ی اور قطبی محددوں ر، طہ، فہ میں حسب ذیل روابط موجود ہیں:

لا = ر جب طہ جم فہ، ما = ر جب طہ جب فہ، ی = ر جم طہ

اِس استحالہ کو عمل میں لانے سے ضوابط (۳۱) میں سے پہلا ضابطہ ہو جاتا ہے

رَ جب طَہ جم فَہ = (∫∫∫ ثہ (ر جب طہ جم فہ) (ر² جب طہ فر ر فر طہ فر فہ)) / (∫∫∫ ثہ (ر² جب طہ فر ر فر طہ فر فہ))

= (∫∫∫ ثہ ر³ جب² طہ جم فہ فر ر فر طہ فر فہ) / (∫∫∫ ثہ ر² جب طہ فر ر فر طہ فر فہ) ....(۳۲)

اسی طرح باقی دو ضابطے ہو جاتے ہیں:

رَ جب طَہ جب فَہ = (∫∫∫ ثہ ر³ جب² طہ جب فہ فر ر فر طہ فر فہ) / (∫∫∫ ثہ ر² جب طہ فر ر فر طہ فر فہ)، ....(۳۳)

رَ جم طَہ = (∫∫∫ ثہ ر³ جب طہ جم طہ فر ر فر طہ فر فہ) / (∫∫∫ ثہ ر² جب طہ فر ر فر طہ فر فہ) ....(۳۴)

۱۰۸ـ ٹھیک اسی کے مشابہ طریقہ سے محددوں کے کسی اور نظام میں مرکز ثقل کے محل کے محددوں کے لیے ضابطے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

کسی جسم کا مرکز ثقل معلوم کرنے کے لیے وہ طریقے کافی ہیں جنکی تفہیم اوپر کی گئی ہے، نیز اِن طریقوں کو ملا کر بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس امر کی توضیح کے لیے ہم ایک ہی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل تین مختلف طریقوں سے معلوم کرینگے۔

توضیحی مثال (۱۳۹)

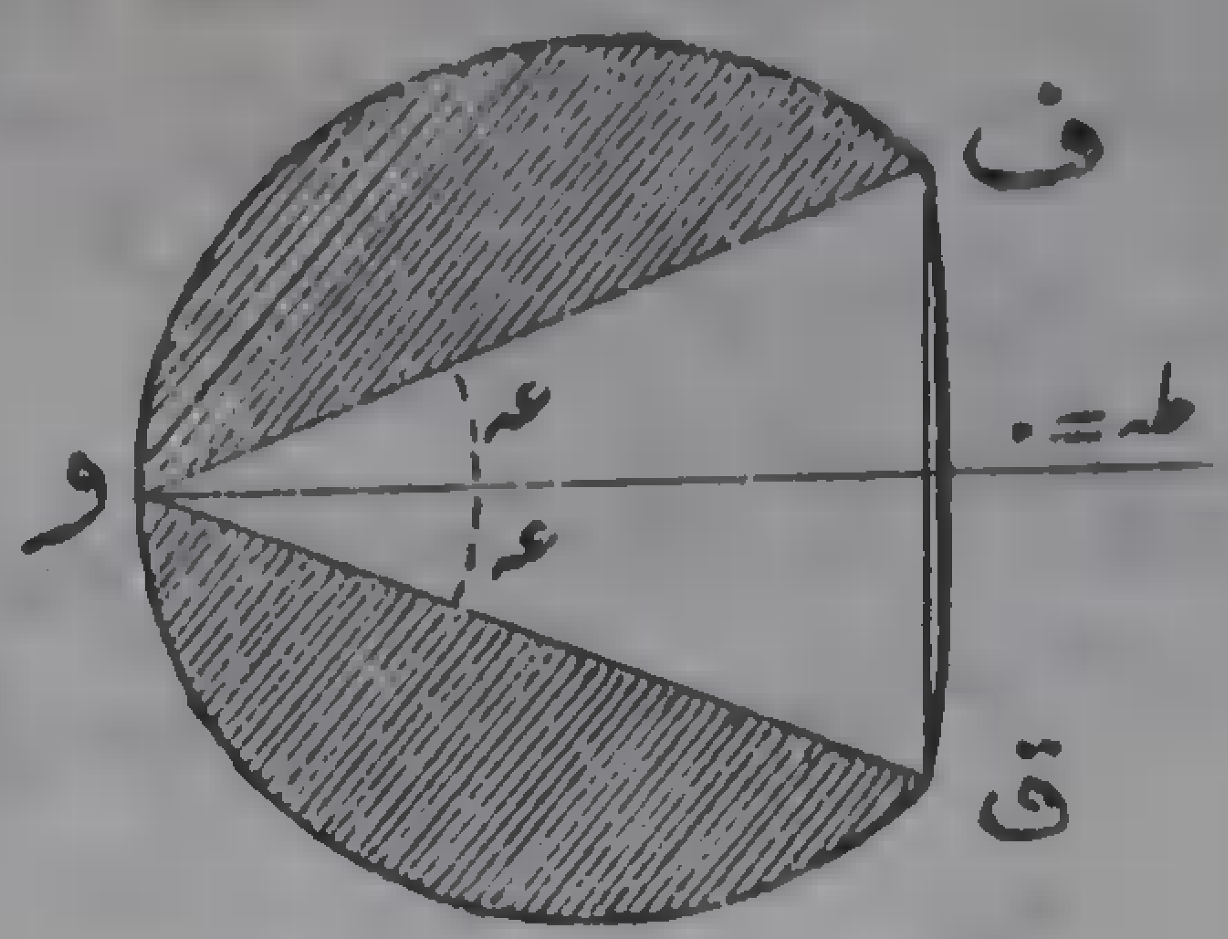
ایک قائم مستدیر مخروط و ف ق کو ایک ٹھوس متجانس کرہ سے کرید کر نکالا گیا ہے مخروط کا راس و، کرہ کی سطح پر اور راس کا محور کرہ کا ایک قطر تھا۔ مابقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

طریقہ (۱)۔ **قطبی محدد**۔ فرض کرو کہ اول ہم قطبی محدد استعمال کرتے ہیں۔ مخروط کے راس و کو مبداء قرار دو اور مخروط کے محور کو ابتدائی خط۔ اگر مخروط کا نیم انتصابی زاویہ ع ہے تو مخروط کی مساوات ط = ع ہے۔ اگر کرہ کا نصف قطر ا ہے تو کرہ کی مساوات ر = ۲ ا جم ط ہے۔ مرکز ثقل، تشاکل کی وجہ سے محور ط = ۰ پر واقع ہونا چاہیے، اس لئے $\bar{ط}$ = ۰۔ اور مساوات (۴۳) ہو جاتی ہے

$$\bar{ر} = \frac{\iiint ث\, ر^{۳}\, جب\, ط\, جم\, ط\, فر ر\, فر ط\, فر ف}{\iiint ث\, ر^{۲}\, جب\, ط\, فر ر\, فر ط\, فر ف}$$

جسم کو متجانس فرض کیا گیا ہے، اِس لئے ث مستقل ہے اور اِس لئے اِس کو شمار کنندے اور نسب نما دونوں میں تکمل کی علامت سے باہر رکھا جا سکتا ہے

فہ کے سلئے تکمل کے حدود فہ = ۰
سے فہ = ۲ π تک ہیں اور اس لئے
ہر صورت میں اِس تکمل کے عمل کی
تکمیل کی جاسکتی ہے۔ تکمل کرکے
۲ π شہ پر تقسیم کرنے سے حاصل
ہوتا ہے



شکل (۸۱)

$$\bar{ر} = \frac{\iint ر^{3} \text{ جب طہ جم طہ فرر فرطہ}}{\iint ر^{2} \text{ جب طہ فرر فرطہ}}$$

پھر ہم ر کے لحاظ سے تکمل کرسکتے ہیں جس کے سلئے حدود ہیں ر = ۰ تا
ر = ۲ ا جم طہ چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{ر} = \frac{\int \frac{1}{4} (\text{۲ ا جم طہ})^{4} \text{ جب طہ جم طہ فرطہ}}{\int \frac{1}{3} (\text{۲ ا جم طہ})^{3} \text{ جب طہ فرطہ}}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ا} \frac{\int \text{جم}^{5} \text{طہ جب طہ فرطہ}}{\int \text{جم}^{3} \text{طہ جب طہ فرطہ}}$$

بالآخر طہ کے لئے تکمل کے حدود طہ = عہ تا طہ = $\frac{\pi}{2}$ (کرہ کا مماس مستوی) ہیں۔ پس چونکہ

$$\int_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{5} \text{طہ جب طہ فرطہ} = -\frac{1}{6} \left[\text{جم}^{6} \text{طہ}\right]_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6} \text{جم}^{6} \text{عہ}،$$

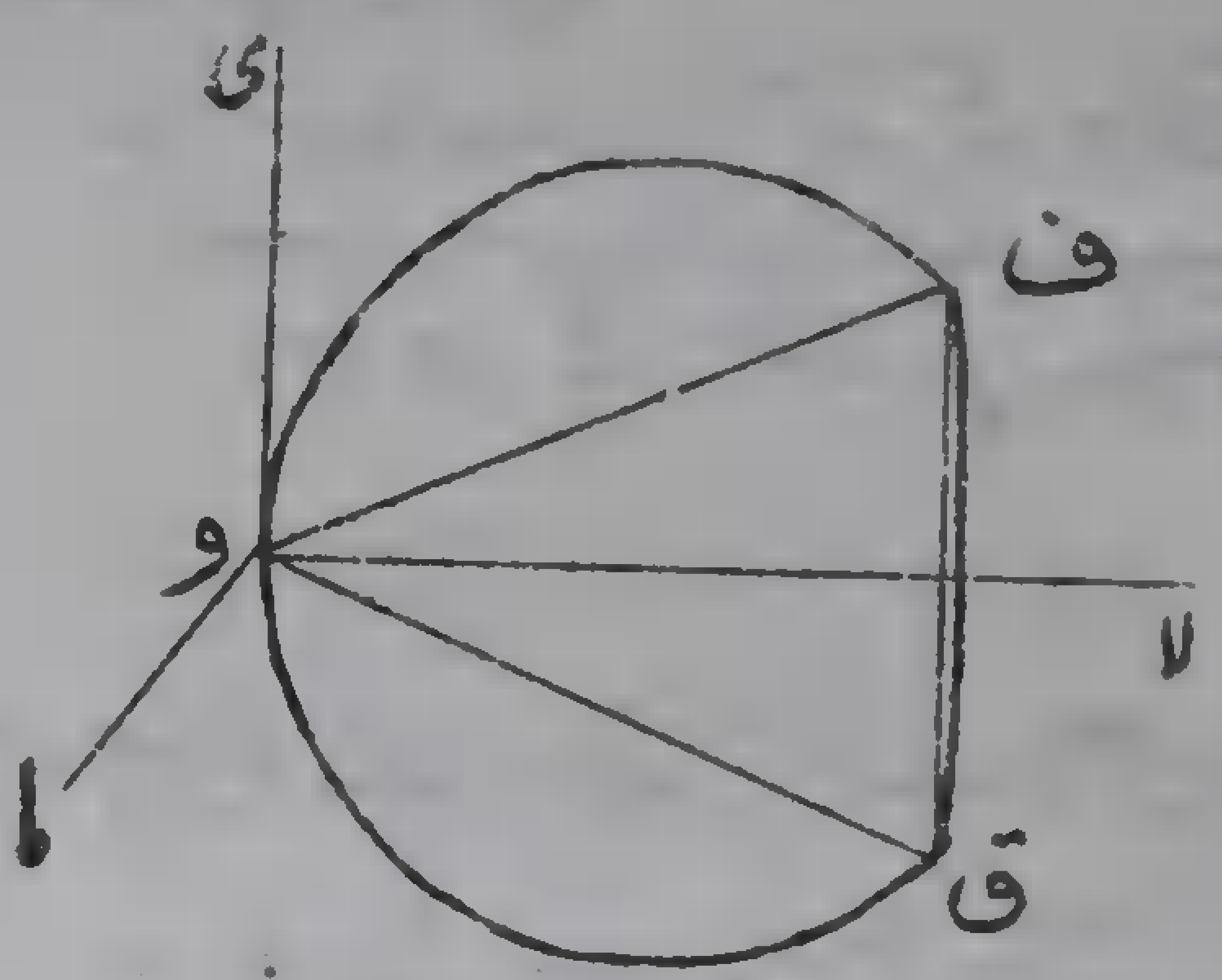
$$\int_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{3} \text{طہ جب طہ فرطہ} = -\frac{1}{4} \left[\text{جم}^{4} \text{طہ}\right]_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \text{جم}^{4} \text{عہ}$$

اس لیے اِن قیمتوں کو درج کرنے سے (۱۴۰)

$$\text{ر} = \frac{۳}{۲}\,\text{ا}\;\frac{\frac{۱}{۶}\,\text{جم}^{۶}\,\text{عہ}}{\frac{۱}{۴}\,\text{جم}^{۴}\,\text{عہ}} = \text{ا}\,\text{جم}^{۲}\,\text{عہ}$$

اِس طرح مرکز ثقل مخروطہ کے محور پر راس سے فاصلہ $\text{ا}\,\text{جم}^{۲}\,\text{عہ}$ پر واقع ہے۔

طریقہ (۲) ۔ کارٹیزی محدد ۔ اب ہم کارٹیزی محددوں کو مرکز ثقل کا محل معلوم کرنے کے لیے استعمال کرینگے۔ و کو مبداء فرض کرو اور مخروطہ کے محور کو محور لا لو۔ اب مخروطہ کی مساوات ہے



$$\text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{لا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ}$$

اور کرہ کی مساوات ہے

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} - ۲\,\text{ا}\,\text{لا} = ۰$$

دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\iiint \text{لا}\,\text{فرلا}\,\text{فرما}\,\text{فری}}{\iiint \text{فرلا}\,\text{فرما}\,\text{فری}}$$

شکل (۸۲)

ہر تکملہ میں ہم اول ما اور ی کے لحاظ سے ایکساتھ تکمل کرسکتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں ہمیں ایک ہی تکملہ کی قیمت معلوم کرنی ہے یعنی $\iint$ فرما فری کی جہاں حدود حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں :

$$\text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = \text{لا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\,\text{عہ}$$

اور

$$\text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲} = ۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^{۲}$$

یہ مسئلہ وہی ہے کہ ایک مستدیر انگوٹھی کا رقبہ معلوم کیا جائے جس کے اندرونی و بیرونی نصف قطر علی الترتیب لا مس عہ اور $\sqrt{۲\,\text{ا}\,\text{لا} - \text{لا}^{۲}}$ ہیں۔ (یہ انگوٹھی بلاشبہ جسم کا وہ مقطوعہ ہے جو مستوی ما ی کے متوازی مستوی پر حاصل ہوتا ہے) ۔ اس انگوٹھی کا رقبہ ہے

π (۲ ا لا − لا^۲) − π (لا^۲ مس^۲ عہ) = π (۲ ا لا − لا^۲ قط^۲ عہ)

اور م م فرما فری کی بجائے یہ قیمت رکھنے سے ضابطہ ہو جاتا ہے

لا̄ = ∫ π لا (۲ ا لا − لا^۲ قط^۲ عہ) فرلا ÷ ∫ π (۲ ا لا − لا^۲ قط^۲ عہ) فرلا

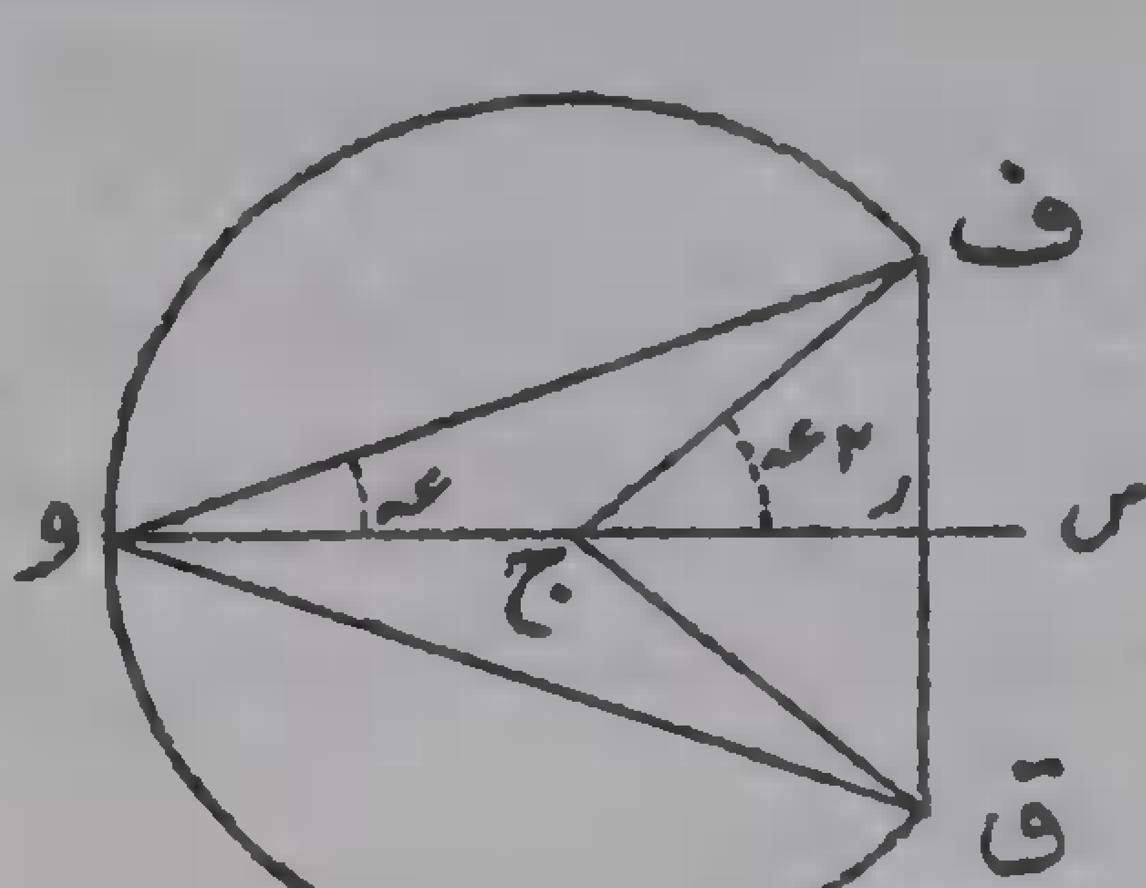
اب تکمل کے حدود میں مبداء لا = ۰ سے لا = ۲ ا جم^۲ عہ تک جو مستوی ف ق پر لا کی قیمت ہے۔ تکملوں کی قیمتیں معلوم کرکے اِن حدود کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا̄ = [۲ ا π × ۱/۳ (۲ ا جم^۲ عہ)^۳ − π قط^۲ عہ × ۱/۴ (۲ ا جم^۲ عہ)^۴] ÷ [۳ ا π × ۱/۲ (۲ ا جم^۲ عہ)^۲ − π قط^۲ عہ × ۱/۳ (۲ ا جم^۲ عہ)^۳]

= ا جم^۲ عہ

جو وہی نتیجہ ہے جو طریقہ (۱) سے حاصل ہوا تھا۔

(۱۴۱) **طریقہ (۳) ہندسی طریقہ** ۔ مرکز ثقل کو اِس طرح بھی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ دئے ہوئے حجم کو ایسے سادہ تر حجموں کے مجموعوں اور فرقوں میں تحویل کیا جائے جن کے مرکز ثقل معلوم ہوں۔



شکل (۸۳)

کُل کرہ و ف س ق میں سے مخروط و ف ر ق اور کروی قطعہ ف ر ق س کو تفریق کرنے سے وہ حجم حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز ثقل معلوم کرنا ہے۔ اب کرہ کا مرکز ثقل اور مخروط کا مرکز ثقل معلوم ہے اور قطعہ ف ر ق س کا مرکز ثقل بہت آسانی سے اِس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ اس کو قطاع ج ف س ق اور مخروط

ج ف ر ق کا فرق سمجھا جائے ۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ابتدائی شکل (کرہ و ف س ق) ۔ (مخروط و ف ر ق) ۔ (قطاع ج ف س ق) + (مخروط ج ف ر ق)

سے بنی ہے ۔

اِن کے حجم اور و ج پر ان کے مراکز ثقل کے فاصلے نقطہ و سے حسب ذیل ہیں :

شکل	حجم	مرکز ثقل کا فاصلہ و سے
+ کرہ	$\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3$	ا
۔ مخروط و ف ر ق	$-\frac{1}{3}(2\,\text{ا جم}^2\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})$	$\frac{3}{4}(2\,\text{ا جم}^2\text{عہ})$
۔ قطاع ج ف س ق	$-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^3(1-\text{جم}\,2\text{عہ})$	$\text{ا}+\frac{3}{8}\text{ا}(1+\text{جم}\,2\text{عہ})$
+ مخروط ج ف ر ق	$\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})$	$\text{ا}+\frac{3}{4}\text{ا جم}\,2\text{عہ}$

اِس جدول میں منفی علامت سے یہ مراد ہے کہ شکل کو جدا کرنا چاہئے یعنی اِس کے حجم کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہئے ۔

و سے کسی مرکز ثقل کے فاصلہ کو لا سے تعبیر کریں اور ضابطہ (دفعہ ۸۶)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\,\text{ک لا}}{\Sigma\,\text{ک}}$$

کو استعمال کریں تو پوری شکل کے مرکز ثقل کا فاصلہ و سے حسب ذیل حاصل ہوتا ہے :

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^4-\frac{1}{4}(2\,\text{ا جم}^2\text{عہ})^2(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^4(1-\text{جم}\,2\text{عہ})\left\{1+\frac{3}{8}(1+\text{جم}\,2\text{عہ})\right\}}{\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3-\frac{1}{3}(2\,\text{ا جم}^2\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^3(1-\text{جم}\,2\text{عہ})}$$

$$\frac{+\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})\,\text{ا}\left(1+\frac{3}{4}\text{جم}\,2\text{عہ}\right)}{+\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})+\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3-\frac{1}{3}(2\,\text{ا جم}^2\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})}$$

$$\frac{}{-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^3(1-\text{جم}\,2\text{عہ})+\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\text{عہ})}$$

جس کو مختصر کیا جائے تو

لآ = ا جم۲ عہ

یہ وہی نتیجہ ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

عام مثالیں

(۱۴۲)

۱۔ ایک مستوی ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د کو وتر ا ج سے تنصیف کیا گیا ہے اور یہ وتر، وتر ب د سے نسبت ا : ب میں تقسیم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ذوار بعۃ الاضلاع کا مرکز ثقل، ا ج میں واقع ہے اور اس کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں نسبت ۲ ا + ب : ۲ ب + ا ہے۔

۲۔ ایک یکساں تار کو ایک دائری قوس اور دو حدودی نصف قطروں کی شکل میں موڑا گیا ہے اور اس کل نظام کا مرکز ثقل مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ سس۱ (- ۲/۳) بنتا ہے۔

۳۔ ایک دائری میز کے تین پائے کور کے نیچے انتصاباً واقع ہیں اور ایک مثلث متساوی الاضلاع بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کل میز کے وزن سے کم وزن میز کو اُلٹ نہیں سکتا۔

۴۔ ایک مثلثی میز تین پایوں پر جو اس کے ضلعوں کے وسطی نقطوں پر ہیں سہارا ہوا ہے اور اس پر کسی محل میں ایک وزن و رکھا گیا ہے۔ یہ معلوم ہوا کہ ایک راس پر وزن ف رکھنے سے میز کا توازن عین ٹوٹتا ہے۔ اسی طرح دوسرے راسوں پر اوزان ق، ر رکھنے سے اس کے توازن میں عین خلل واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف + ق + ر، وزن و کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۵۔ ایک مثلثی پترے کے تین کونوں پر تین وزن کیلوں کے ذریعہ جوڑ دیے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، مثلث کے مقابل کے ضلع کے طول کے متناسب ہے اور تینوں کا باہم وزن پترے کے ابتدائی وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل نو نقطی دائرہ کے مرکز پر ہے۔

۶۔ ایک مثلثی پترے کو جس کا وزن و اور جس کے اضلاع ا، ب، ج ہیں

طول ل۱، ل۲، ل۳ کی ڈوریوں کے ذریعہ جو اس کے راسوں سے بندھی ہیں ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ وک ل۱، وک ل۲، وک ل۳ ہیں جہاں

$$ک = \left[۲\left(ل_۱^۲ + ل_۲^۲ + ل_۳^۲\right) - ا^۲ - ب^۲ - ج^۲\right]^{-\frac{۱}{۲}}$$

۷ — ایک گھڑی کی سوئی کو ایک چکنے ٹیکن پر رکھ کر کس طرح تیار کیا جا سکتا ہے کہ وہ گھڑی کاری (watchwork) کے ذریعہ وقت بتلائے جبکہ ایک وزن گھڑی کی سوئی میں چھپا ہوا سوئی کے ساتھ اطراف گھومے۔

۸ — یکساں مادے سے بنا ہوا تنکلہ کی شکل کا ایک جسم دو قائم مستدیر مخروطوں سے محدود ہے جن کے ارتفاع ۶ اور ۲ انچ ہیں اور جن کا قاعدہ مشترک ہے جو نصف قطر ایک انچ کا ایک دائرہ ہے۔ اس جسم کو ایک ڈوری کے ذریعہ جو مستدیر قاعدہ کی کور کے ایک نقطہ سے بندھی ہے لٹکایا گیا ہے۔ تنکلہ کے محور کا میلان انتصابی کے ساتھ معلوم کرو جبکہ وہ آزادانہ لٹک رہا ہو۔

۹ — ایک پورا گنجفہ میز پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ ہر کارڈ اپنے نیچے کے کارڈ سے گنجفے کے طول کی سمت میں اتنا نکلا ہوا ہے کہ وہ عین گرتے تو ہے بلالحاظ اُن کارڈوں کے جو اس کے نیچے ہیں۔ ثابت کرو کہ متواتر کارڈوں کے سروں کے درمیانی فاصلے ایک سلسلہ موسیقیہ بناتے ہیں۔

۱۰ — ثابت کرو کہ ایک یکساں طور پر وزنی ڈوری کے کسی حصہ ف ق (۱۴۳)
کا مرکز ثقل، ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کے اوپر انتصاباً واقع ہوتا ہے جبکہ ڈوری آزادانہ لٹک رہی ہو۔

۱۱ — ایک کروی خول کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر ا، ب ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ حسب ذیل ہے

$$\frac{۳(ا+ب)(ا^۲+ب^۲)}{۸(ا^۲+اب+ب^۲)}$$

۱۲ — ایک لنگر چھلے کو ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز اور محور میں سے

گذرتا ہے دو مساوی حصوں میں قطع کیا گیا ہے۔ کسی ایک نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۱۳ — ثابت کرو کہ رسّا کشی کے مقابلہ میں ایک شخص کو جو توت (کھینچ) لگانی پڑتی ہے وہ اس کے وزن کا $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ہے جہاں ا، اُس خط کا افقی ظل ہے جو اسکی ایڑیوں کو اس کے مرکز ثقل سے ملاتا ہے اور ب، زمین کے اوپر رسّی کی بلندی ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ ایک گھوڑا جس کا وزن و پونڈ ہے زمین کے اوپر ارتفاع ف پر $\frac{\text{و ا}}{\text{ف}}$ پونڈ کی افقی کھنیچ اس طرح عائد کر سکتا ہے کہ اپنے مرکز ثقل کو اُس محل سے ا فٹ آگے بڑھائے جبکہ وہ اپنے قدموں پر سیدھا کھڑا ہوا تھا۔

۱۵ — متغیر کثافت اور مادے کی ایک سلاخ کو ایک شخص اپنی دو انگشتہائے شہادت پر اس طرح سہارے ہوئے ہے کہ سلاخ افقی محل میں ہے۔ شخص اپنی ان انگلیوں کو ایک دوسرے کی جانب اُن کو ایک ہی افقی مستوی میں رکھتے ہوئے حرکت دیتا ہے اور سلاخ کو ایک یا دونوں انگلیوں پر سے پھسلنے سے نہیں روکتا۔ ثابت کرو کہ جب اُس کی انگلیاں مل جاتی ہیں تو سلاخ کا مرکز ثقل اُن دو نقاط تماس کے وسط میں ہوتا ہے جن پر سلاخ اُس کی انگلیوں کو مس کرتی ہے۔

۱۶ — ایک نیم دائری قرص انتصابی مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا منحنی کنارہ ایک کھُردرے افقی مستوی پر اور اتنے ہی کھُردرے ایک انتصابی مستوی پر ٹِکا ہوا ہے، رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ کم سے کم زاویہ جو احاطہ کرنے والا قطر انتصابی کے ساتھ بنا سکتا ہے حسب ذیل ہے:

$$\text{جم}^{-1}\frac{\text{مہ}+\text{مہ}^{2}}{1+\text{مہ}^{2}}\times\frac{3\pi}{4}$$

۱۷ — نصف قطر ا اور وزن و کا ایک نیم کرہ ایک چکنے میز پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ اس کی منحنی سطح میز پر ہے اور طول ل (ل < ا) کی ایک ڈوری اس کی کور کے ایک نقطہ اور میز کے ایک نقطہ سے بندھی ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ ہے

$$\frac{\text{۳}}{\text{۸}}\,\text{و}\;\frac{\text{ا} - \text{ل}}{\sqrt{\text{۲ا ل} - \text{ل}^{\text{۲}}}}$$

۱۸ — وزن و کا ایک مثلثی پترا تین انتصابی ڈوریوں سے جو اس کے راسوں سے بندھی ہیں اس طرح سہارا گیا ہے کہ مثلث کا مستوی افقی ہے۔ وزن و کا ایک ذرہ مثلث کے مرکز عمودی پر رکھا گیا۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{\text{ت}_{\text{۱}}}{\text{۱+۳ مم ب مم ج}} = \frac{\text{ت}_{\text{۲}}}{\text{۱+۳ مم ج مم ا}} = \frac{\text{ت}_{\text{۳}}}{\text{۱+۳ مم ا مم ب}} = \frac{\text{و}}{\text{۲}}$$

۱۹ — ایک پترے کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک مکافی اور اس کے محور پر کے (۱۴۴)
ایک عمود وار خط سے محدود ہے۔

۲۰ — اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس مکافی نما سے ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور پر عمود ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۱ — اُس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک قطع ناقص کے دو نیم قطروں کے درمیان محدود ہے۔

۲۲ — اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس ناقص نما سے ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۳ — ایک ناقص نما خول کے نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو متشابہ ہم مرکز اور ہم محور ناقص نماؤں سے اور مرکز میں سے گذرنے والے ایک مستوی سے محدود ہے۔

۲۴ — ایک قائم مستدیر مخروط کو جس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے دو مساوی حصوں میں ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور میں سے گذرتا ہے تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی ایک حصہ کا مرکز ثقل محور سے $\frac{\text{ر}}{\pi}$ فاصلہ پر واقع ہے۔

۲۵ — ایک پترا نیم کعبی مکافی $\text{لا}^{\text{۳}} = \text{ا ما}^{\text{۲}}$، محور لا، اور معین لا = ا سے محدود ہے۔ اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۶ — منحنی

ر = ا جب ۳ طه

کے ایک سادہ حلقہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۷ — ایک کرہ کے ایک ثمن کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۸ — نصف قطر ب کے ایک نیم کرہ میں نصف قطر ا کا ایک اسطوانی سوراخ آر پار اِس طرح بنایا گیا ہے کہ وہ نصف قطر جو نیم کرہ کے قاعدہ پر عمود ہے سوراخ کا مرکزی خط بھی ہے۔ شکل کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۹ — اُس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو دائروں

$$لا^2 + ما^2 = ا^2 ، لا^2 + ما^2 = ۲ ا ب$$

سے محدود ہے۔

۳۰ — ایک عدسہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو متجانس شیشے سے بنا ہوا ہے اور جس کی کروی سطحوں کے نصف قطر ر، س ہیں اور جس کی موٹائی مرکز پر م ہے اور کنارے پر صفر۔

(۱۴۵)

ساتواں باب

کام

۱۰۹۔ کام کی پیمائش۔ کام کی مختلف قسمیں ہیں لیکن علم حیل میں جس کام سے ہمیں واسطہ رہے گا وہ صرف وہ کام ہے جو اجسام کو جن پر قوتیں عمل کرتی ہوں حرکت دینے میں انجام پاتا ہے۔ ایسے کام کو حیلی کام کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ حیلی کام ہوتا ہے جب کبھی کوئی جسم اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے مقابلہ میں حرکت کرتا ہے مثلاً وزن اٹھاتے میں، کھردری سطح پر کوئی وزنی شئے گھسیٹنے میں یا لچکدار ڈوری تنانے میں۔ پہلی صورت میں کام قوت جاذبہ کے خلاف انجام پاتا ہے، دوسری صورت میں اس رگڑ کی قوت کے خلاف جو متحرک شئے پر کھردری سطح لگاتی ہے، اور تیسری صورت میں ڈوری کے تناؤ کے خلاف۔

کئے ہوئے کام کی مقدار کا تخمینہ کرنے میں صریحاً دو چیزوں کو محسوب کرنا ہوگا یعنی اس قوت کی مقدار کو جو جسم پر عمل کرتی ہے اور اس فاصلہ کو جو قوت کے خلاف جسم نے طے کیا ہے۔ کام کی مقدار صریحاً قوت کے راست متناسب ہوگی۔ ۲۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک معلومہ بلندی تک اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اس کام کا دگنا ہوگا جو ۱۰۰ پونڈ کے ایک وزن کو اسی بلندی تک اٹھانے میں مطلوب ہوگا۔ نیز کام اس فاصلے کے بھی متناسب ہوگا جو طے ہوا ہے۔ کسی وزن کو ۲ فٹ تک

اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اُس کام کا دُگنا ہو گا جو اُسی وزن کو ایک فٹ تک اٹھانے میں مطلوب ہو گا۔ اس لئے کئے ہوئے کام کی مقدار، قوت اور فاصلہ کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

ایک پونڈ کے وزن کو ایک فٹ ارتفاع تک اٹھانے میں جو کام ہوتا ہے اُس کی مقدار کو ایک فٹ پونڈ کہتے ہیں۔

اوپر کے بیان سے یہ ظاہر ہے کہ و پونڈ کے وزن کو ف فٹ بلندی تک اٹھانے میں کئے ہوئے کام کی مقدار و ف فٹ پونڈ ہے۔ نیز کسی جسم کو ف پونڈ کی ایک قوت کے خلاف س فٹ تک حرکت دینے میں کیا ہوا کام ف س فٹ پونڈ ہے، اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

(۱۳۶) **ایک جسم کو ایک ایکساں قوت کے خلاف کسی فاصلہ تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ قوت اور فاصلہ کا حاصل ضرب ہے۔**

مثلاً فرض کرو کہ ایک ریل گاڑی کو ایک ہموار راستہ پر کھینچنے میں جو قوت مطلوب ہوتی ہے وہ ۱۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ تب اس گاڑی کو ۱۰۰ میل کے فاصلہ تک کھینچنے میں جو کام ہو گا وہ

= ۱۰۰۰ × ۵۲۸۰ × ۱۰۰ = ۵۲۸۰۰۰۰۰۰ فٹ پونڈ

۱۱۰۔ کام کرنے کی شرح۔ کام کو اکثر ایک مقررہ وقت میں انجام دینا ہوتا ہے اور اس لیے اکثر اس کی ضرورت ہوتی ہے کہ وہ شرح معلوم کی جائے جس سے کام ہو رہا ہے۔ کام کرنے کی وہ شرح جس میں ۳۳۰۰۰ فٹ پونڈ کا کام فی منٹ ہوتا ہے **ایک اسپی طاقت** کہلاتی ہے۔ اسپی طاقت کو بالعموم ا۔ ط (H. P) سے تعبیر کیا جائے گا۔

اس اکائی کو واٹ (Watt) نے جاری کیا تھا کیونکہ یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک معمولی گھوڑے کے کام کرنے کی شرح ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوا ہے کہ بہت کم گھوڑے مسلسل ایک اسپی طاقت کے ساتھ کسی مدت تک کام کر سکتے ہیں۔

اسپی طاقت کا حساب لگانے کے لیے ذیل میں ایک مثال دیجاتی ہے:

فرض کرو کہ اس انجن کی اسپی طاقت مطلوب ہے جو ایک ٹرین کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے کھینچتا ہے جبکہ رگڑ کی مزاحمت ۱۰۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار = ۴۴ فٹ فی ثانیہ، اس لئے وہ کام جو فی ثانیہ ہوا = ۴۴ × ۱۰۰۰۰ فٹ پونڈ۔ لیکن چونکہ ایک اسپی طاقت = ۵۵۰ فٹ پونڈ فی ثانیہ اس لئے مطلوبہ اسپی طاقت

$$= \frac{۴۴ \times ۱۰۰۰۰}{۵۵۰} = ۸۰۰$$ اسپی طاقت

اس سے وہ اسپی طاقت ملتی ہے جو ٹرین کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے کھینچنے میں مطلوب ہے اگر رفتار مستقل نہ ہو تو ہم دیکھیں گے کہ اسپی طاقت مختلف ہوگی کیونکہ کام کا کچھ حصہ حرکت کا اسراع پیدا کرنے میں صرف ہوگا لیکن موجودہ صورت میں ہم اپنی توجہ صرف ایکساں رفتار کی حرکت پر محدود رکھتے ہیں۔

کام کی مطلق اکائی

۱۱۱ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوت کی عملی اکائی کمیت کا وزن ہے اور اس اکائی کے علاوہ ایک اور اکائی بھی ہے جس کو مطلق اکائی کہتے ہیں اور جسکی تعریف یہ ہے کہ یہ وہ قوت ہے جو اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔ چونکہ عملی اکائی اکائی کمیت میں اسراع ج پیدا کرتی ہے (۱۴۷) جہاں ج اسراع بوجہ جاذبہ ارض ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عملی اکائی مطلق اکائی کی ج گنی ہے۔

برطانوی عملی اکائیوں میں اکائی قوت، پونڈ وزن ہے۔ مطلق اکائیوں میں متناظر اکائی پونڈل کے طور پر مشہور ہے۔ یہ وہ قوت ہے جو ایک پونڈ کی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔

کام کی عملی اکائی جیسا کہ ہم بیان کر چکے ہیں وہ کام ہے جو ایک پونڈ کی

کمیت کو ایک فٹ تک اٹھانے میں انجام پاتا ہے یعنی ایک پونڈ کے وزن کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں۔ کام کی ایک مطلق اکائی بھی ہے جس کی تعریف یہ کی جاتی ہے کہ یہ وہ کام ہے جو ایک پونڈل کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں ہوتا ہے۔ اس اکائی کو فٹ پونڈل کہتے ہیں۔ اب چونکہ ایک پونڈ وزن، ج پونڈل کے مساوی ہے اس لئے صریحاً حسب ذیل ربط حاصل ہوتا ہے

ایک فٹ پونڈ = ج فٹ پونڈل

مثالیں

۱۔ ایک اسپی طاقت کا ایک گھوڑا ایک ٹن وزنی گاڑی کو کس رفتار سے کھینچ سکتا ہے اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ رگڑ ایک ایسی افقی قوت پیدا کرتی ہے جو گاڑی کے وزن کا $\frac{1}{۴۰}$ ہے۔

۲۔ اگر ایک جسم کو جس پر ف پونڈل کی ایک مزاحم قوت عمل کرتی ہے اس مزاحمت کے خلاف رفتار و سے حرکت میں لایا جائے تو کتنی اسپی طاقت مطلوب ہوگی۔

۳۔ ۷ اسپی طاقت کا ایک بھاپ بیلن (Roller) جس کا وزن ایک ٹن ہے، کس شرح سے ایک راستہ پر لڑھکے گا اگر مزاحمت بوجہ رگڑ بیلن کے وزن کے مساوی ہے

۴۔ ایک گھونگا جس کا وزن $\frac{1}{۲}$ اونس ہے ۶ فٹ بلند دیوار پر ۴ گھنٹوں میں چڑھتا ہے۔ کس اسپی طاقت سے وہ کام کرتا ہے۔

۵۔ اینٹوں کے ایک ڈھیر کو جس کا وزن ۵ ٹن ہے ایک مکان کی چھت پر پہنچانا ہے جس کی بلندی ۵۰ فٹ ہے۔ دس مزدور لگائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، $\frac{1}{۱۲}$ اسپی طاقت کی اوسط شرح سے کام کرتا ہے۔ اس کام میں کتنا وقت لگیگا۔

۶۔ ایک انجن کے فشارے کا رقبہ ا مربع فٹ اور ضرب ل فٹ ہے اور انجن ن گردشیں فی منٹ کرتا ہے۔ اگر فشارہ پر عمل کرنے والا دباؤ فی اکائی

رقبہ ف پونڈ وزن فی مربع فٹ ہو تو ثابت کرو کہ انجن جس اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے وہ

$$\frac{\text{ف ل ا ن}}{۳۳۰۰۰}$$

ہے۔

۷۔ ایک حراکہ (Locomotive) کا دائری فشارہ ۱۷″ قطر کا ہے اور اس کی ضرب ۲۶″ ہے۔ وہ ۲۵۰ گردشیں فی منٹ کرتا ہے اور دباؤ ۲۲۵ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے۔ اس کی اسپی طاقت معلوم کرو۔

۸۔ اگر ایک جہاز کو جس کا طول ۱۵۰ فٹ ہے ۹ بحری میل کی رفتار سے (۱۴۸)
چلانے کے لیے ۲۰۰ اسپی طاقت مطلوب ہو تو ثابت کرو کہ ایک مشابہ جہاز کو جو متشابہاً غرق ہے اور ۶۰۰ فٹ لمبا ہے ۱۸ بحری میل کی رفتار سے چلانے کے لیے ۲۵۶۰۰ اسپی طاقت مطلوب ہوگی جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت تر سطح کے اور رفتار کے مربع کے متناسب ہے۔ نیز ثابت کرو کہ مافیہ جہاز کے ہر ٹن کے لیے کوئلے کی قیمت دونوں جہازوں میں ایک ہی ہوگی۔

۹۔ ۱۵۰ اسپی طاقت ایک دُھرے سے دوسرے دُھرے پر ایک پٹے کے ذریعہ منتقل ہوتی ہے جو دُھروں کے دو پہیوں پر ۲۵۰ فٹ فی منٹ کی خطی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ پٹے کی دو جانبوں پر تناؤ کا فرق معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک حراکہ میں فی اسپی طاقت گھنٹہ (Horse-power-hour) $۱\frac{۱}{۴}$ پونڈ کوئلہ خرچ ہوتا ہے۔ ایک ٹرین کو جس کا مجموعی وزن ۱۰۰۰ ٹن ہے ہموار راستہ پر ۵۰ میل تک کھینچنے میں کتنا کوئلہ مطلوب ہوگا جبکہ راستہ کی مزاحمت بوجہ رگڑ ۱۲ پونڈ وزن فی ٹن ہو۔

۱۱۔ ۲۲۰۰۰ اسپی طاقت کا ایک جہاز چھ دنوں میں ۲۳۰۰ میل طے کرتا ہے۔ جہاز کی حرکت پر مزاحمت معلوم کرو۔

متغیر قوت کے خلاف کام

۱۱۲۔ اگر ایک جسم کو ایک قوت کے خلاف جس کی شدت مستقل نہ ہو

بلکہ متحرک جسم کے راستہ پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہو تحرک کیا جائے تو ہم اس صورت میں انجام پذیر کام کے لیے ضابطہ ف س استعمال نہیں کر سکتے
کام کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم اُس پورے خط کو جس پر حرکت واقع ہوتی ہے لاانتہا صغیر چھوٹے ٹکڑوں کی لامتناہی تعداد میں تقسیم کرتے ہیں، اِن میں سے ہر ٹکڑا اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ حرکت میں جو قوت مزاحم ہے اُس کو کسی ایک ٹکڑے پر اثناء حرکت میں مستقل مقدار کا فرض کیا جا سکے۔

اگر کسی جزو کا طول فرس ہو جس کا فاصلہ ابتدائی نقطہ سے س ہے اور اگر قوت کی شدت جو اِس چھوٹے جزو فرس میں حرکت کی مزاحم ہے ف ہو تو اِس جزو کو طے کرنے میں کام کی مقدار ف فرس ہوگی۔ اسلئے تمام اجزا میں کئے ہوئے کام کی مقداروں کا مجموعہ یعنی کل کام جو ہوا

$$\int \text{ف فرس}$$

ہے۔

لچکدار ڈوری کو تنانے میں کام

۱۱۳۔ اِس ضابطہ کے استعمال کی مثال کے لیے فرض کرو کہ ہم وہ کام معلوم کرتے ہیں جو ایک لچکدار ڈوری کو تنانے میں انجام پاتا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل ہے اور اس کی لچک کی قدر لہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

جب ڈوری کا طول کھنچکر لا ہو جاتا ہے تو اِس کا تناؤ ف، دفعہ ۳۹ (۱۴۹)
کے ضابطہ کی رو سے حسب ذیل ہے:

$$\text{ت} = \frac{\text{لا} - \text{ل}}{\text{ل}}\ \text{لہ}$$

ڈوری کو اور مزید طول فرلا تک تنانے میں — یعنی طول لا سے طول لا + فرلا تک — کیا ہوا کام

$$= \text{ت فرلا}$$

$$= \frac{\text{لہ}}{\text{ل}} (\text{لا} - \text{ل}) \,\text{فرلا}$$

تکمل سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ ڈوری کو طول ا سے طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$= \int_{\text{لا}=\text{ا}}^{\text{لا}=\text{ب}} \frac{\text{لہ}}{\text{ل}} (\text{لا} - \text{ل}) \,\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{لہ}}{2\,\text{ل}} \left\{ (\text{ب} - \text{ل})^2 - (\text{ا} - \text{ل})^2 \right\}$$

$$= \frac{\text{لہ}}{2\,\text{ل}} (\text{ب} + \text{ا} - 2\,\text{ل})(\text{ب} - \text{ا})$$

وسیع شدہ طول ب - ا ہے اور $\frac{\text{لہ}}{2\,\text{ل}} (\text{ب} + \text{ا} - 2\,\text{ل})$ وہ تناؤ ہے جبکہ توسیع کا نصف مکمل ہو چکتا ہے یعنی جبکہ $\text{لا} = \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب})$

پس معلوم ہوا کہ

کسی لچکدار ڈوری کو کسی طول ا سے (جو ڈوری کے طبعی طول سے بڑا ہو) طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ

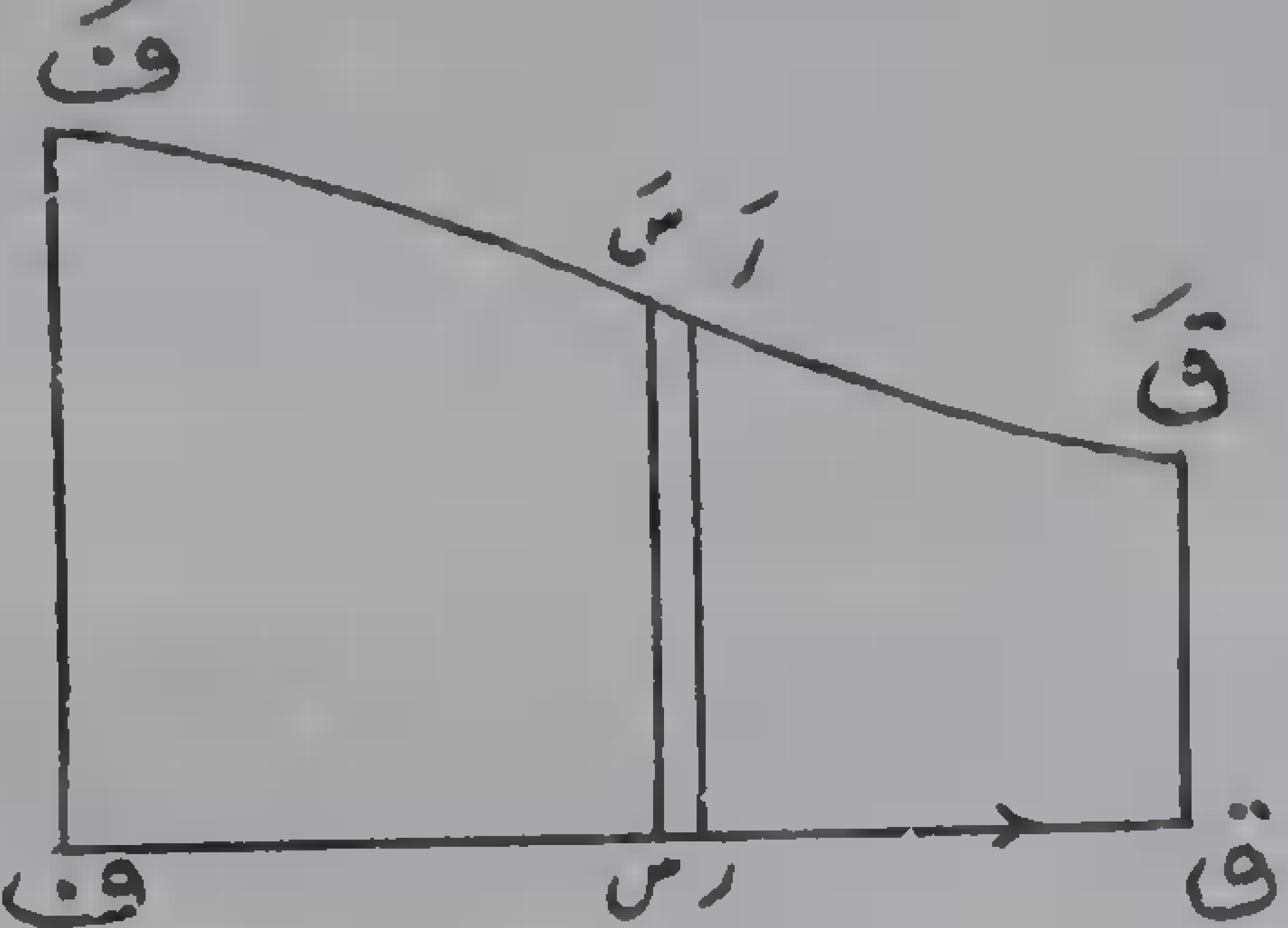
تناؤ طول $\frac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب})$ پر $\times (\text{ب} - \text{ا})$

کے مساوی ہے۔

اگر تناؤ کو پونڈ وزن میں اور توسیع (ب - ا) کو فٹوں میں پیمائش کیا جائے تو صریحاً اس حاصل ضرب سے کام کی وہ مقدار حاصل ہوگی جو فٹ پونڈوں میں پیمائش کی گئی ہے۔ اگر تناؤ کو پونڈلوں میں اور (ب - ا) کو فٹوں میں پیمائش کیا جائے تو حاصل ضرب سے فٹ پونڈلوں میں کام کی مقدار حاصل ہوگی۔

کام کو رقبہ کے ذریعہ تعبیر کرنا (۱۵۰)

۱۱۴ — فرض کرو کہ ف ق اُس راستہ کو تعبیر کرتا ہے جو ایک متحرک جسم مرتسم کرتا ہے اور فرض کرو کہ ہم ف ق کے ہر نقطہ پر مُعین کھینچتے ہیں جو کسی پیمانہ پر (جو ہم چاہیں) اُس قوت کو تعبیر کرتے ہیں جو اُس نقطہ پر جسم کی حرکت میں مزاحم ہے۔ فرض کرو کہ ایسے کوئی دو متصلہ نقطے س، ر ہیں اور اِن نقطوں پر کے مُعین س سَ، ر رَ ہیں۔



شکل (۸۴)

اب چھوٹی ٹپّی س سَ رَ ر کے رقبہ کو انتہا میں س ر × س سَ کے مساوی فرض کیا جا سکتا ہے۔ اس پیمانہ پر جس پر ہم قوتوں کو تعبیر کر رہے ہیں یہ حاصل ضرب = فاصلہ س ر × وہ قوت جو جسم کی حرکت از س تا ر میں مزاحم ہے

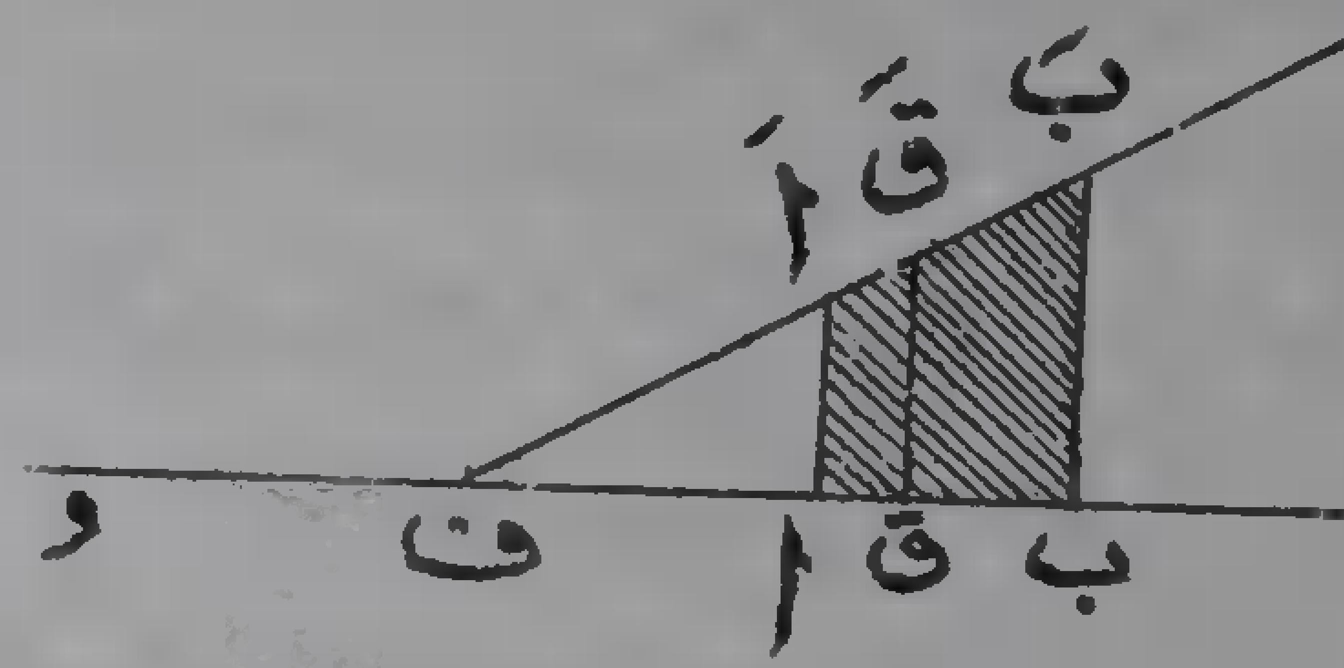
دوسرے الفاظ میں چھوٹے رقبہ س سَ رَ ر سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو جسم کو س سے ر تک حرکت دینے میں ہوا ہے۔

ایسے چھوٹے رقبوں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل رقبہ ف فَ قَ ق سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو ف تا ق حرکت میں انجام پایا ہے۔

۱۱۵ — اس طریقہ سے وہ کام بہت ہی آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے جو ایک لچکدار ڈوری کو تتانے میں انجام پاتا ہے اور جس کی ہم دفعہ ۱۱۲ میں تخمین کر چکے ہیں۔ فرض کرو کہ و ف ڈوری کا طبعی طول ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے سرے و کو خوب مضبوط پکڑ لیا گیا ہے اور یہ کہ ڈوری کو جب تتایا جاتا ہے تو اس کا دوسرا سرا ف خط و ف پر حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ کام مطلوب ہے جو ڈوری کو

طول و ا سے طول و ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے۔

فرض کرو کہ خط و ف ا ب کا کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ مُعین قَ قَ کھینچا گیا ہے جو اُس تناؤ کو تعبیر کرتا ہے جبکہ ڈوری کا طول و ق ہے۔



شکل (۸۵)

ق کے مختلف محلوں کے لئے معین ق قَ کا ارتفاع مختلف ہوگا۔

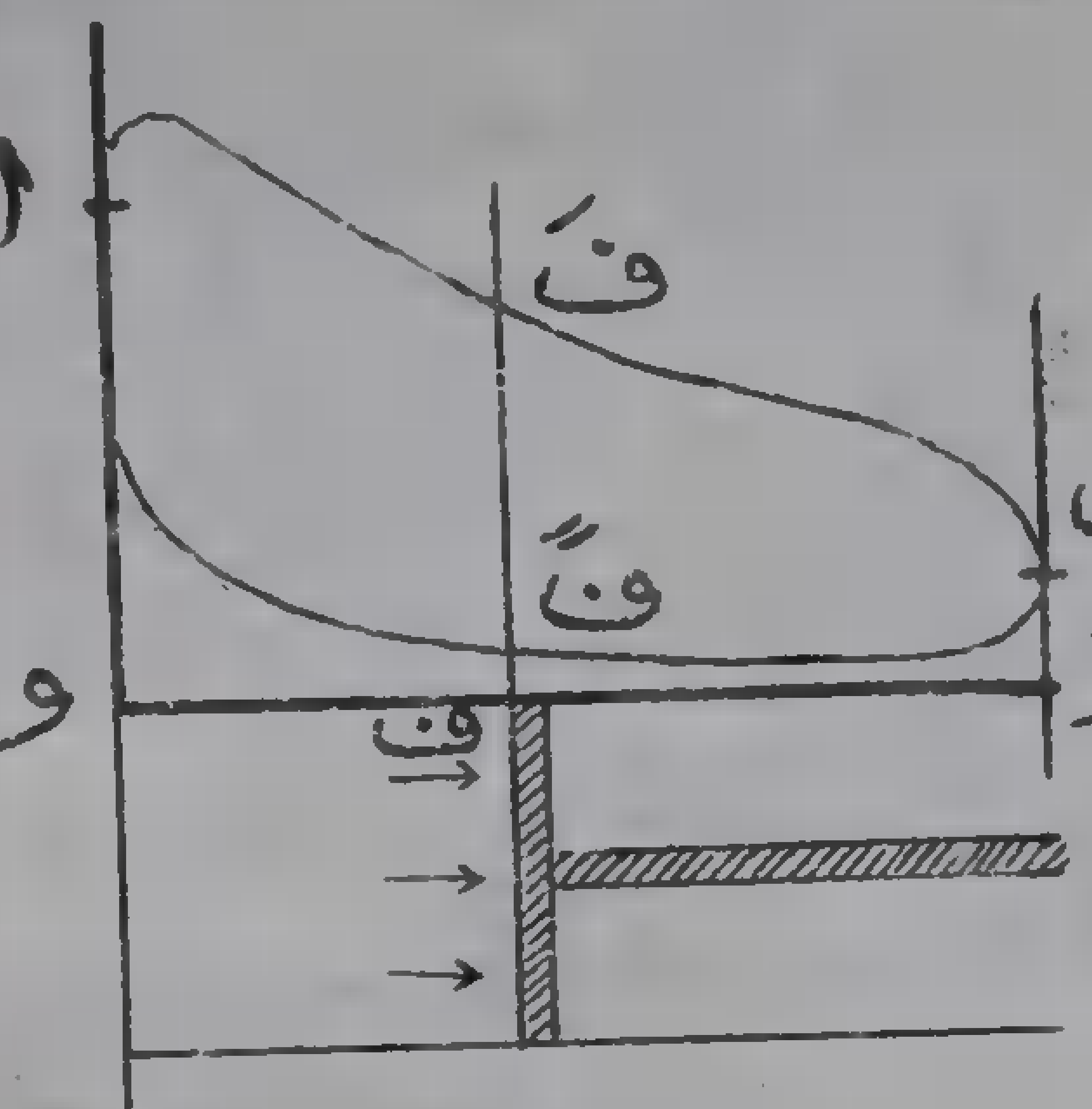
اب چونکہ کلیہ ہُک کی رُو سے تناؤ توسیع کے متناسب ہوتا ہے اسلئے مُعین ق قَ کا ارتفاع (جو تناؤ کو تعبیر کرتا ہے) ہمیشہ ف ق (توسیع) کے ساتھ ایک ہی نسبت رکھے گا۔ اِس لئے قَ ہمیشہ ف میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر ہوگا۔ اگر ا اَ اور ب بَ وہ مُعین ہوں جو علی الترتیب ا اور ب پر کے تناؤں کو تعبیر کرتے ہیں تو یہ خط نقطوں اَ، بَ میں سے گذرے گا۔ اب وہ کام جو ڈوری کو ا سے ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے دفعہ ۱۱۴ کی بموجب رقبہ ا اَ بَ ب سے تعبیر ہوتا ہے (دیکھو شکل ۸۵)

اِس شکل کا رقبہ صریحاً ا ب کو اُس مُعین سے ضرب دینے سے حاصل (۱۵۱)
ہوتا ہے جو ا ب کے نقطہ وسطی پر قائم کیا گیا ہو۔ یہ مُعین ڈوری کے اُس تناؤ کو تعبیر کرتا ہے جبکہ اس کا طول $\frac{1}{2}$ (و ا + و ب) ہو یعنی ہمیں دفعہ ۱۱۳ کا نتیجہ ہی حاصل ہوتا ہے جو حسب ذیل ہے:

(کیا ہوا کام) = (توسیع کی وسعت، ا ب) × (توسیع کی نصف منزل پر تناؤ)

۱۱۶ — مظہار نقشہ — کام کی اُس ترسیمی تعبیر سے جسکو دفعہ ۱۱۴ میں سمجھایا گیا ہے عملی انجینیرنگ میں استفادہ کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ و وَ وہ فاصلہ ہے جو ایک فشارہ، اسطوانہ میں طے کرتا ہے۔ جب فشارہ کسی محل ف میں ہو تو فرض کرو کہ فشارہ پر عمل کرنے والے دباؤ کی پیمائش

کی گئی ہے اور فرض کرو کہ اس دباؤ کو تعبیر کرنے کے لیے کسی پیمانہ پر ایک خط ف فَ، و وَ کے علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ جب فشارہ طول و وَ پر حرکت کرتا ہے اور پھر طول وَ و پر واپس ہوتا ہے تو نقطہ ف ایک بند منحنی ا فَ ب فً ا مرتسم کرتا ہے جس کو فشارہ کی حرکت کا مظہار نقشہ کہتے ہیں۔



شکل (۸۶)

فشارہ کی آگے کی حرکت میں بھاپ نے اُسپر جو کام کیا ہے وہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں رقبہ ا فَ ب وَ و ا سے تعبیر ہوتا ہے جو منحنی ا فَ ب اور محور و وَ سے محدود ہے۔ یہ کام فشارہ کو اس کے ڈنڈے کی ڈھکیل کے خلاف آگے حرکت دینے میں صرف ہوا ہے۔ اسی طرح فشارہ کی پیچھے کی حرکت میں یعنی حرکت واپسیں میں بھاپ نے اسپر جو کام کیا ہے وہ رقبہ ب وَ و ا فً ب سے تعبیر ہوتا ہے جو منحنی ب فً ا اور محور و وَ سے محدود ہے، اس رقبہ کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہئے کیونکہ فشارہ اب اسپر عمل کرنے والے دباؤ کے خلاف حرکت کر رہا ہے۔

پس کل کام جو فشارہ پر ہوا ان دو رقبوں کے فرق سے تعبیر ہوتا ہے اور یہ وہ رقبہ ہے جو خود مظہار نقشہ کا ہے۔ اس لیے وہ شرح معلوم کرنے کے لیے جس پر انجن کام کر رہا ہے صرف اس امر کی ضرورت ہے کہ مظہار نقشہ کا رقبہ اور گردشوں کی تعداد فی اکائی وقت معلوم کی جائے۔

کام اُس قوت کے خلاف جو سمت حرکت کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے (۱۵۲)

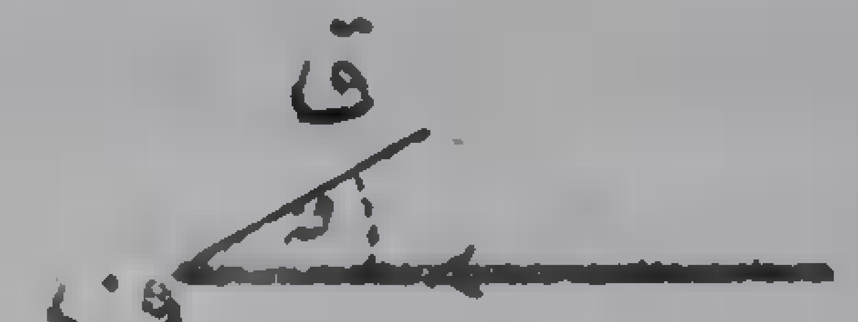
۱۱۷۔ ہم نے ابتک اُن صورتوں پر بحث کی ہے جن میں قوت ایسی سمت میں

عمل کرتی ہے جو اُس سمت کے ٹھیک مخالف ہے جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ لیکن ہمیں اُس کام کا بھی حساب لگانا پڑے گا جو انجام پاتا ہے جبکہ حرکت قوت کی سمت کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے۔

جب جسم کو قوت کی سمت کے علی القوائم متحرک کیا جاتا ہے تو صریحاً کیا ہوا کام صفر ہے مثلاً کسی وزن کو ایک افقی سطح پر پھرانے میں جاذبہ ارض کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا۔

اب ہم وہ کام معلوم کرینگے جو انجام پاتا ہے جبکہ کسی جسم کو ایک ایسی سمت میں متحرک کیا جاتا ہے جو اس پر عمل کرنے والی قوت کی سمت سے کوئی زاویہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک جسم کو ف سے ق تک جو اِس کے راستہ کا ایک چھوٹا حصہ فرس ہے حرکت دی گئی ہے جبکہ اِس پر ایک قوت ر کا عمل ہوتا ہے جس کا خط عمل، ق ف سے زاویہ فہ بناتا ہے۔ ر کو دو اجزائے ترکیبی ر جم فہ، ر جب فہ میں تحلیل کرو جن میں سے پہلا ق ف پر اور دوسرا ق ف کے عمود وار عمل کرے۔

ر کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ وہی ہے جو ہوتا اگر یہ دو قوتیں ر جم فہ اور ر جب فہ ایک ساتھ جسم پر عمل کرتیں۔ اول الذکر قوت کے خلاف



شکل (۸۷)

جو کام ہوا ہے وہ ر جم فہ فرس ہے اور موخر الذکر کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ صفر ہے۔ اِس لئے کل کام جو انجام پایا ہے ر جم فہ فرس ہے۔

۱۱۸ — فرض کرو کہ ر کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، ے ہیں اور فرض کرو کہ راستہ کے عنصر ف ق کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں۔ ر کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام

$$\frac{لا}{ر}،\ \frac{ما}{ر}،\ \frac{ے}{ر}$$

ہیں اور چونکہ یہ خط عمل، ف ق سے زاویہ ۲۱ - فہ بناتا ہے اسلئے

جم (π/۲ - فہ) = ل لا/ر + م ما/ر + ن ہے/ر

پس ر فرس جم فہ = - فرس (ل لا + م ما + ن ہے)

= - (لا فرلا + ما فرما + ہے فری)

جہاں فرلا، فرما، فری محوروں پر فرس کے ظل ہیں۔ اس سے اُس کام کے لئے جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے ایک تحلیلی جملہ حاصل ہوتا ہے۔ تکمل کے ذریعہ ہم وہ کام معلوم کر سکتے ہیں جو کسی حرکت میں ہوا ہے۔

۱۱۹ ـ جاذبہ کے خلاف اجسام کے ایک نظام کو اٹھانے میں کام (۱۵۳)

کام ـ اگر کمیت ک کے ایک ذرہ کو ایک راستہ پر جو انتصابی (اوپر وار) سے زاویہ فہ بنائے فاصلہ فرس تک حرکت دی جائے تو کیا ہوا کام ک ج جم فہ فرس ہے۔ چونکہ وہ فاصلہ جس میں سے ذرہ کو اُٹھایا گیا ہے فرس جم فہ ہے اِس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کام جو ہوا وہ جسم کے وزن (ک ج) اور اُس ارتفاع کا حاصل ضرب ہے جس میں سے ذرہ کو اٹھایا گیا ہے۔

ذرہ کو کسی راستہ پر سے لیجانے اور راستہ کے متواتر عناصر پر جو کام ہوا ہے اِن کی مقداروں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوتا ہے وہ ذرہ کے وزن اور اُس کُل انتصابی فاصلہ کا حاصل ضرب ہوتا ہے جس میں سے ذرہ کو اُٹھایا گیا ہے۔

۱۲۰ ـ فرض کرو کہ ہم کمیتوں ک۱، ک۲، ک۳ ..... کے متعدد ذروں کو حرکت دیتے ہیں۔ فرض کرو کہ حرکت سے قبل زمین کے اوپر اِن کے ارتفاع ف۱، ف۲، ف۳ ..... ہیں اور حرکت کے ختم پر اِن کے ارتفاع فَ۱، فَ۲، فَ۳ ..... ہیں۔ پہلے ذرہ پر جاذبہ ارض کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ ک۱ ج (فَ۱ - ف۱) ہے، ایسی تمام مقداروں کو جمع کرنے سے جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوا ہے وہ

= ک۱ ج (فَ۱ - ف۱) + ک۲ ج (فَ۲ - ف۲) + ...

= ج (Σ ک فَ - Σ ک ف) .... (۳۵)

فرض کرو کہ ذروں کی مجموعی کمیت ک سے تعبیر ہوتی ہے۔ اور فرض کرو کہ تمام ذروں کے مرکز ثقل کا ارتفاع حرکت سے قبل ف اور حرکت کے بعد فَ ہے۔ اب دفعہ ۸۶ کے ضابطہ کی رُو سے

$$ف = \frac{\Sigma\, ک_۱ ف_۱}{\Sigma\, ک} = \frac{\Sigma\, ک_۱ ف_۱}{ک}$$

اِس لئے $\Sigma\, ک_۱ ف_۱ = ک\, ف$

اور اسی طرح $\Sigma\, ک_۱ فَ_۱ = ک\, فَ$

اس لئے کُل کام بموجب جملہ (۳۵)

$$= ج\,(ک\, فَ - ک\, ف)$$

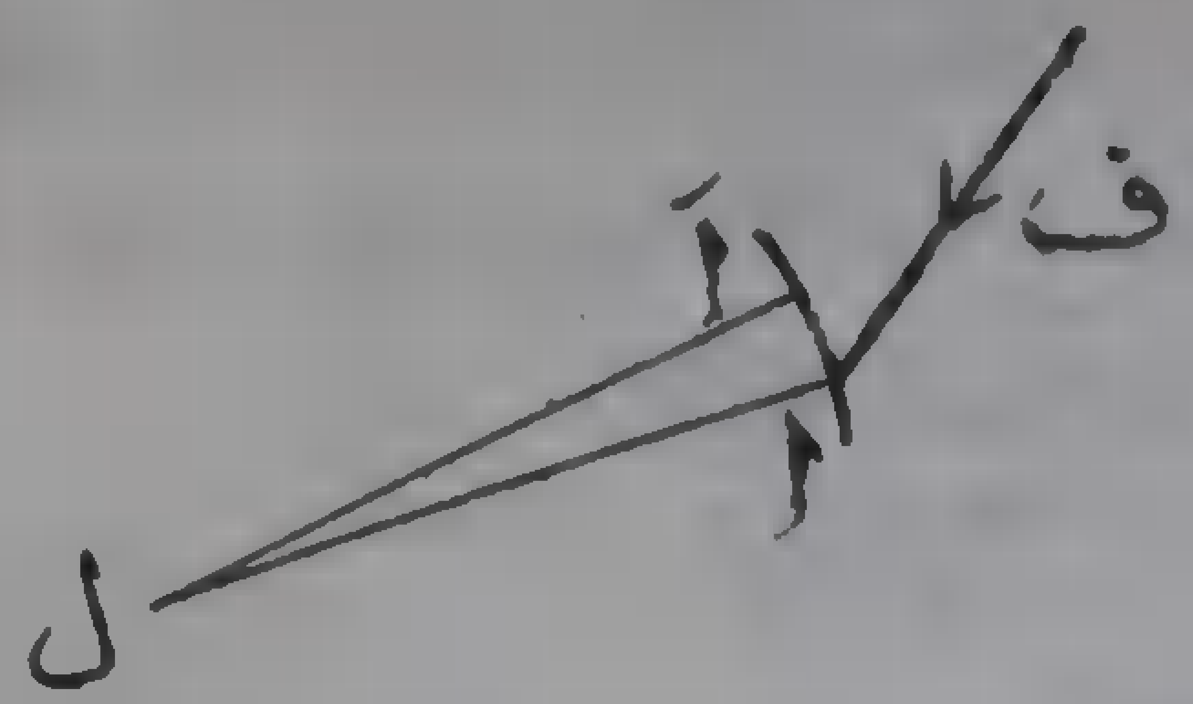
$$= ک\, ج\,(فَ - ف)$$

(۱۵۴) اِس طرح جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوا وہ ذروں کے مجموعی وزن اور اُس انتصابی ارتفاع کا حاصل ضرب ہے جس میں سے ذروں کے مرکز ثقل کو اُٹھایا گیا ہے۔

کام جو ایک جفت کے خلاف انجام پائے

۱۲۱ ـ مسئلہ۔ اگر ایک اُستوار جسم کو جس پر قوتوں کا ایک نظام عمل کرتا ہے کسی محور کے گرد زاویہ صہ میں سے چھوٹی گردش دیجائے تو کام جو کیا گیا وہ گ صہ ہے جہاں گ اِس محور کے گردان قوتوں کا معیار ہے جو حرکت میں مزاحم ہیں۔

فرض کرو کہ گردش کا محور وہ خط ہے جو صفحہ کی مستوی پر عمود ہے اور اِس سے نقطہ ا پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ نمونہ کی ایک قوت ف ہے جو جسم کے ذرہ ا پر عمل کرتی ہے۔ گردش کے بعد فرض کرو کہ ا کا محل اَ



شکل (۸۸)

ہو جاتا ہے اور اِس لئے زاویہ ل ا اَ، صہ کے مساوی ہے کیونکہ یہ وہ زاویہ ہے جس میں سے جسم کو گردش دی گئی ہے۔ اثنائے گردش میں قوت ف کا نقطہ عمل ا سے اَ تک حرکت کرتا ہے اور اس لئے جو کام ہوا وہ

= ف × ا اَ × جم فہ

جہاں فہ، ف اور ا اَ کا درمیانی زاویہ ہے،

= ا اَ × ف کا جزو ترکیبی سمت ا اَ پر

= صہ × ل ا × ف کا جزو ترکیبی سمت ا اَ پر

= صہ × ف کا معیار گردش کے محور کے گرد

اگر اُستوار جسم پر متعدد قوتیں عمل کریں جن کے نقاط عمل جسم کے مختلف ذرات ہوں تو عمل جمع سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ کل کام جو ہوا وہ

= صہ × گردش کے محور کے گرد اِن تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ

= گ صہ، جہاں گ گردش کے محور کے گرد تمام قوتوں کا معیار ہے۔

مثالیں (۱۵۵)

۱۔ ایک شخص جس کا وزن ۱۴۰ پونڈ ہے ایک پہاڑی راستہ پر چڑھتا ہے جس کا میلان اُفق کے ساتھ ۳۰° ہے۔ اگر اُس کے چڑھنے کی شرح ایک میل فی گھنٹہ ہو تو معلوم کرو کہ اُس کو اپنا وزن اٹھانے میں کتنی اسپی طاقت سے کام کرنا پڑ رہا ہے۔

۲۔ ایک انجن، ۱۰۰ ٹن وزنی ٹرین کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی شرح سے ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۲۰۰ میں ۱ ہے کھینچ رہا ہے۔ مزاحمت بوجہ رگڑ ٹرین کے وزن کا $\frac{1}{200}$ ہے۔ معلوم کرو کہ کس اسپی طاقت سے انجن کام کر رہا ہے۔

۳ — ایک آٹو موبیل، ایک ٹن وزنی، ایک پہاڑ پر جس کا میلان ۲۰ میں ۱ ہے ۸ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑھتی ہے — مزاحمت بوجہ رگڑ کو گاڑی کے وزن کا $\frac{۱}{۵۰}$ لیکر معلوم کرو کہ وہ کس شرح سے پہاڑ کے نیچے اتر سکتی ہے، یہ فرض کرو کہ اسپی طاقت جو انجن میں پیدا ہوتی ہے وہی رہتی ہے —

۴ — پتھروں کے ایک بوجھ کو جس کا وزن ۱۸ ٹن ہے ایک ناؤ سے ایک گھاٹ پر جو ناؤ کے اوپر ۳۰ فٹ بلند ہے حمالوں (Cranes) کے ذریعہ اتارا گیا ہے جہاں حمالوں کو ایک انجن چلاتا ہے — اگر اتارنے میں تین گھنٹے صرف ہوں تو وہ اوسط اسپی طاقت معلوم کرو جس سے انجن کام کر رہا ہے —

۵ — یہ فرض کرکے کہ ایک آدمی چلتے وقت ہر قدم پر اپنے مرکز ثقل کو ایک انچ انتصابی فاصلہ میں سے اوپر اٹھاتا ہے معلوم کرو کہ وہ کتنی اسپی طاقت سے کام کرتا ہے اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چلے اور اس کا قدم ۳۲ انچ اور اس کا وزن ۱۶۸ پونڈ ہو۔

۶ — ایک سیکل سوار اور اس کی مشین کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہے اور وہ ایک چڑھائی پر جو ۸۰ میں ۱ ہے ۱۵ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑھتا ہے — اس کی سیکل کی گیرائی ۷۲ انچ ہے اور کرنیکوں کا طول ۷ انچ ہے — رکاب پر اس کے پاؤں کا اوسط انتصابی دباؤ معلوم کرو، یہ فرض کرو کہ یہ دباؤ صرف رکاب کی نیچے وار حرکت میں موجود رہتا ہے۔

۷ — ایک جہاز کے انجن ۵۰۰۰ اسپی طاقت کے ہیں اور جب انجن پوری طاقت سے کام کرتے ہیں تو انجن ۷۵ گردشیں فی منٹ کرتا ہے — وہ جفت معلوم کرو جو دُہرے کے ذریعہ منتقل ہوتا ہے —

۸ — جب ایک جسم دوسرے پر لڑھکتا ہے تو ایک جفت پیدا ہوتا ہے جو حرکت کی مزاحمت کرتا ہے، یہ جفت اس جفت کے مساوی ہوتا ہے جو طول ل کے ایک بازو کے سرے پر عمادی تعامل پیدا کرتا ہے جہاں ل کو لڑھکنی رگڑ کی قدر کہتے ہیں —

اگر ریل کا ایک ڈبہ نصف قطر ا کے پہیہ پر چلے تو ثابت کرو کہ اس کی حرکت میں لڑھکنی رگڑ سے جو مزاحمت پیدا ہوگی وہ اس کے وزن کا $\frac{ل}{ا}$ گُنی ہے —

موہوم کام کا اصول

۱۲۲ــــ چھوٹے ہٹاؤ سے فی الحال وہ حرکت مراد ہوگی جس میں ایک نظام کا ہر ذرہ اپنی ابتدائی مقام سے اتنے فاصلہ تک حرکت کرے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو ایک صغیر مقدار تصور کیا جا سکے اور اس کا مربع نظر انداز ہو سکے اگر نظام قوتوں کے زیر عمل ہے تو کسی چھوٹے ہٹاؤ کی تکمیل میں کام انجام پائیگا اب چونکہ ہٹاؤ کو ایک چھوٹی مقدار فرض کیا گیا ہے اِس لیے جو کام ہوگا وہ بھی ایک چھوٹی مقدار کا ہوگا۔

اگر کوئی ذرہ توازن میں ہے تو حاصل قوت جو اس پر عمل کرتی ہے معدوم ہوتی ہے اور اس لئے ذرہ کے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے وہ ہٹاؤ کے مقابلتاً اعلیٰ تر رتبہ کا ہونے کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے۔ اگر کوئی استوار جسم یا استوار اجسام یا ذروں کا کوئی نظام توازن میں ہے اور اگر اِس میں کوئی چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو چونکہ ہر ذرہ پر کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے اِس لیے کل کام صفر ہے۔ (۱۵۶)

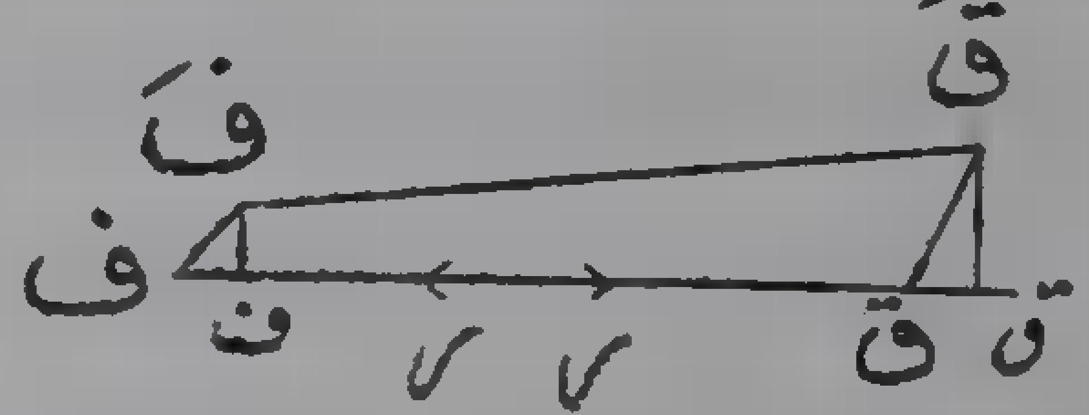
۱۲۳ــــ کسی نظام کے ذروں پر عمل کرنے والی قوتوں کو حسب دفعہ ۵۰ دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے:

(ا) وہ قوتیں جو اجسام پر بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں،

(ب) اُن اعمال اور تعاملات کے زوج جو اجسام کے ذروں کے درمیان یا ایک دوسرے کو مس کرنے والے دو اجسام کے درمیان عمل کرتے ہیں کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے اُس کو محسوب کرنے میں ہمیں اُس کام کو شمار کرنا چاہئے جو دونوں جماعتوں کی قوتوں کے خلاف انجام پاتا ہے لیکن ہم دیکھیں گے کہ دوسری جماعت کی قوتوں سے جو ارقام پیدا ہوتی ہیں اُنمیں سے بیشتر ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں۔

۱۲۴ــــ فرض کرو کہ اول ہم قوتوں کے اُس زوج پر غور کرتے ہیں جو ایک استوار جسم کے دو ذروں ف، ق کے درمیان عمل اور تعامل سے پیدا ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ

ہر قوت کی مقدار م ہے اور اس کی سمت ق ف یا ف ق ہے بموجب اِس کے کہ وہ ف یا ق پر عمل کرتی ہے ۔ فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ کا اثر یہ ہے کہ ف، ق علی الترتیب فَ، قَ تک حرکت کرتے ہیں اور فرض کرو کہ فَ، قَ سے ف ق پر عمود فَ فِ اور قَ قِ کھینچے گئے ہیں۔ اُس قوت م کے خلاف جو ف پر عمل کرتی



شکل (۸۹)

ہے جو کام ہوا وہ م × ف فِ ہے اور اُس قوت م کے خلاف جو ق پر عمل کرتی ہے جو کام ہوا وہ ۔ م × ق قِ ہے ۔ اِس لئے کُل کام جو ہوا وہ

= م (ف فِ ۔ ق قِ)

= م (فِ قِ ۔ ف ق)

= م (ف ق ۔ فَ قَ کا ظِل ف ق پر)

اب چونکہ جسم اُستوار ہے طول فَ قَ، طول ف ق کے مساوی ہے اور چونکہ بموجب فرض ہٹاؤ چھوٹا ہے اِس لئے فَ قَ کا ظِل ف ق پر

= فَ قَ، اِلّا رتبہ اول سے اعلیٰ تر رتبہ والی چھوٹی مقداروں کے

= ف ق

اِس لئے جو کام ہوا وہ صفر ہے ۔

۱۲۵ ۔ نیز وہ کام بھی صفر ہوتا ہے جو قوتوں کے اُس زوج کے خلاف انجام پاتا ہے جو دو چکنی سطحوں کے درمیان عمل اور تعامل پر مشتمل ہوتی ہیں۔

اوّل اُس صُورت پر غور کرو جس میں ایک جسم ساکن ہے اور دوسرا اِس کی سطح پر پھسلتا ہے ۔ ایسے ہٹاؤ میں اگر کوئی کام ہوا ہے تو وہ اس تعامل کے خلاف ہے جو متحرک جسم پر عمل کرتا ہے ۔ چونکہ قوت عماد پر عمل کرتی ہے

اور اِس کے نقطہ عمل کا مماسی سطح میں حرکت کرنا ضروری ہے یعنی عماد کے علی القوائم اِس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے۔
وہ عام سے عام حرکت جو اِن دو سطحوں کے لئے ممکن ہے دو حرکتوں سے مرکب ہوتی ہے ایک اُس قسم کی حرکت جو ابھی بیان کی گئی اور دوسری وہ حرکت جس میں یہ دو سطحیں ایک اُستوار جسم کے طور پر حرکت کرتی ہیں ہم ابھی دیکھ چکے ہیں کہ ہٹاؤ کے پہلے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ صفر ہے۔ ہٹاؤ کے دوسرے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ حسب دفعہ ۱۲۴ معدوم ہوتا ہے پس کل کام معدوم ہوتا ہے اور مطلوبہ نتیجہ ثابت ہے۔



شکل (۹۰)

۱۲۶ — نتائج بالا درست نہیں ہوں گے اگر سطحوں کے درمیان تماس کھُردرا ہو۔ ایسی صورت میں جو کام ہوتا ہے وہ رگڑ کی قوتوں کی مقدار پر منحصر ہوتا ہے اور چونکہ اِن قوتوں کی مقدار معلوم کرنا اُتنا ہی مشکل ہے جتنا پورے مسئلے کو حل کرنا اِس لئے ایسی صورتوں میں موہوم کام کا طریقہ کوئی قدر نہیں رکھتا۔

۱۲۷ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوتوں کی ایک بڑی تعداد کو اُس کام کے محسوب کرنے میں جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے ترک کیا جا سکتا ہے اور موہوم کام کے اُصول میں جس میں یہ بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی نظام توازن میں ہو تو کسی چھوٹے ہٹاؤ میں کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہوتی ہے صرف اس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت ہے جو بیرونی قوتوں کے خلاف تکمیل پاتا ہے اور اُس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں جو اُستوار اجسام کے اعمال اور تعاملات کے خلاف انجام پائے۔

۱۲۸ — **چرخیوں کے نظام** — موہوم کام کے اُصول کا ایک اہم

اطلاق حسب ذیل ہے ؛ فرض کرو کہ چرخیوں اور نا امتداد پذیر رسیوں کی ایک ترتیب ہے جس میں رسیوں کے دو سرے آزاد ہیں ۔ ان میں سے ایک سرا اُس وزن سے بندھا ہے جس کو اُٹھانا مقصود ہے اور دوسرے سرے پر طاقت لگائی جاتی ہے ۔ فرض کرو کہ رسی کے ان دو آزاد سروں کو علی الترتیب (۱۵۸) وزن سرا اور طاقت سرا کہا گیا ہے اور فرض کرو کہ چرخیوں اور رسیوں کا یہ نظام ایسا ہے کہ وزن سرے کو ایک انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینے کے لئے طاقت سرے کو ن انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینا پڑتا ہے ۔ فرض کرو کہ وزن سرے سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور فرض کرو کہ یہ معلوم ہوا ہے کہ طاقت سرے پر قوت ف لگانے سے توازن پیدا ہوتا ہے ۔

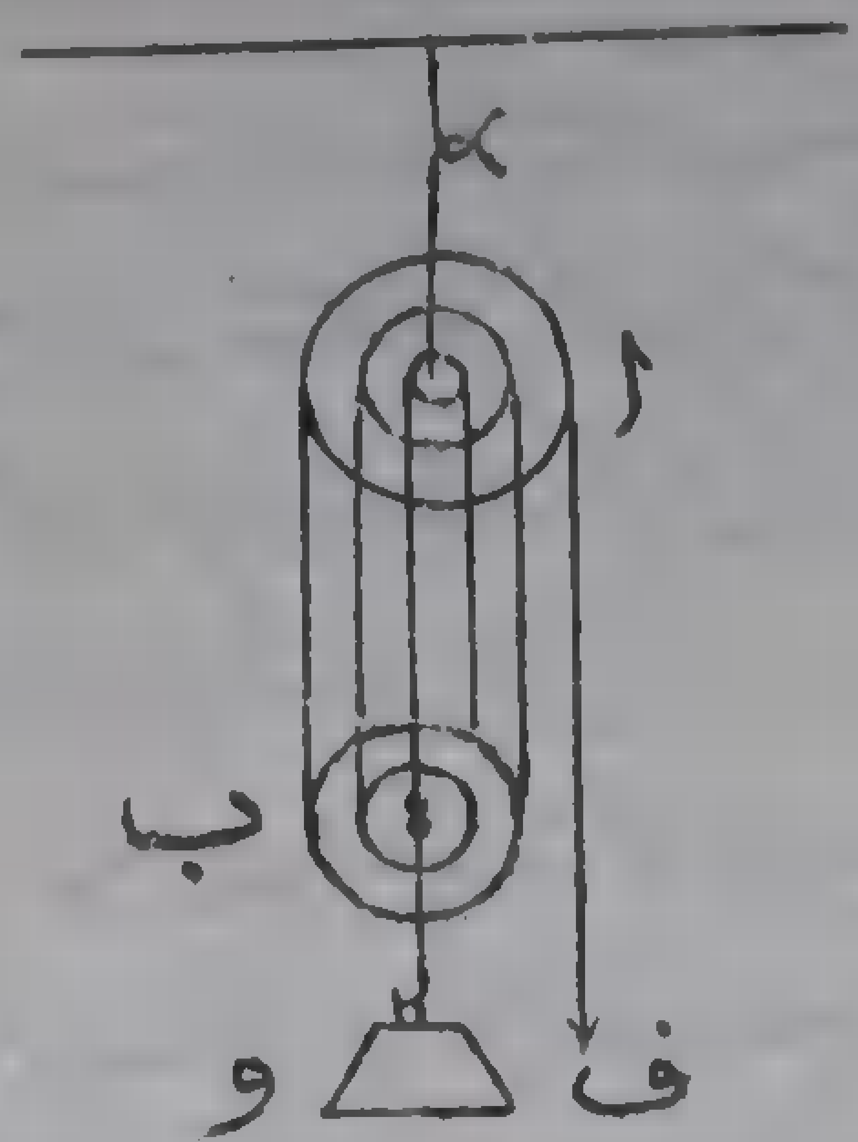
اب ہمارے پاس دو قوتیں ف اور و توازن میں ہیں ان میں رشتہ معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ ہم اس نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں ۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم وزن و کو فاصلہ فرس تک حرکت دیتے ہیں اب اگر رسی میں توسیع واقع نہ ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا چاہئے کہ طاقت سرے ف نے فاصلہ ن فرس طے کیا ہے ۔ بیرونی قوت نے جو کام کیا ہے وہ صرف اُس کام پر مشتمل ہے جو رسی کے طاقت سرے پر انجام پایا ہے اور یہ کام ف ن فرس کے مساوی ہے ۔ جاذبہ کے خلاف وزن کو حرکت دینے میں جو کام ہوا ہے وہ و فرس ہے ۔ یہ کام مختلف العلامت ہیں اگر ہم وزن اٹھائیں تو و فرس کو مثبت لینا چاہئے اور ف ن فرس کو منفی، اور اس کے بالعکس ۔ اگر نظام ابتداً توازن میں تھا تو اِس چھوٹے ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے جو کام مجموعی طور پر انجام دیا ہے وہ معدوم ہونا چاہئے، اِس لئے توازن کی مساوات ہے

و فرس ـ ف ن فرس = ۰

اس لیے $\text{ف} = \frac{\text{و}}{\text{ن}}$

جس سے طاقت اور وزن کے درمیان رشتہ معلوم ہوتا ہے ۔

اِس تحقیق میں ہم نے رگڑ وغیرہ کو نظر انداز کیا ہے اور نیز متحرک رسیوں اور چرخیوں کے اوزان کو بھی نظر انداز کر دیا گیا ہے۔



شکل (۹۱)

چرخیوں کے نظام کی ایک مثال کے طور پر اُس ترتیب پر غور کرو جو شکل (۹۱) میں دکھائی گئی ہے۔

اِس میں چرخیوں کے دو قالب ا اور ب ہیں۔ اول الذکر ثابت ہے اور دوسرا جس سے وزن
و لٹکایا گیا ہے حرکت پذیر ہے۔ رسی، طاقت سرے سے نکلتی ہے اور
قالب ا کی ایک چرخی پر سے گذرتی ہے اور پھر قالب ب کی ایک چرخی پر
سے گذرتی ہے اور علیٰ ہذا جتنی بھی چرخیاں ہوں ان پر سے ہو کر گذرتی جاتی ہے
اور آخر میں اِس کے دوسرے سرے کو قالب ب سے باندھ دیا جاتا ہے۔ ف اور و
کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف عدد ن معلوم کرنے کی ضرورت
ہے۔ فرض کرو کہ رسی کے آزاد طاقت سرے کے علاوہ رسی کے انتصابی حصوں کی
تعداد س ہے۔ اب اگر ہم طاقت سرے کو اِسقدر کھینچیں کہ وزن سرا ایک انچ (۱۵۹)
اوپر اُٹھے تو اِن س حصوں میں سے ہر حصہ بقدر ایک انچ کے چھوٹا ہو جائے گا
اور اِس لیے طاقت سرا بقدر س انچ کے لمبا ہو گا۔ اِس لیے ن = س اور
اِس صورت میں $ف = \frac{و}{س}$ ۔

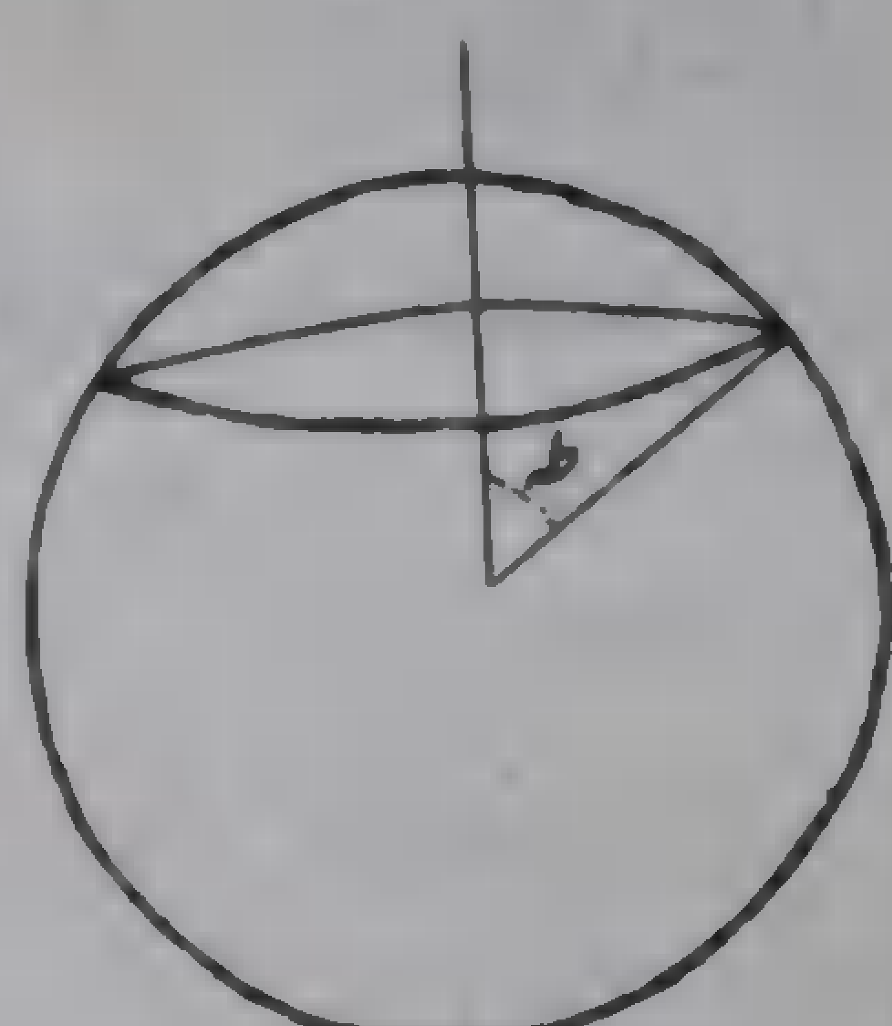
مثلاً نچلے قالب میں دو چرخیاں اور اوپر کے قالب میں تین چرخیاں ہوں تو ن کی قیمت ۵ ہو گی اور اس لیے طاقت کا ہر پونڈ وزن کے ۵ پونڈ سہارے گا چنانچہ کوئی شخص اگر طاقت سرے کو ۱۰۰ پونڈ کی قوت سے کھینچے تو وہ ۵۰۰ پونڈ کے وزن کو سہار سکے گا اور جوں ہی اس کی کھینچنے کی قوت ۱۰۰ پونڈ سے بڑھ جائیگی

وہ ۵۰۰ پونڈ کا وزن اُٹھانے لگے گا۔

توضیحی امثلہ

ا۔ موہوم کام کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ فطری طول ا کی ایک بے سرا لچکدار ڈوری ہے جس کی لچک کا مقیاس لہ ہے اور جو نصف قطر ب کے ایک کرہ پر رکھی گئی ہے اور جاذبہ کے تحت تن جانے میں آزاد ہے۔

توازن کے محل میں توسیع کی مقدار بلا شبہ قوتوں کو تحلیل کرنے سے معلوم کی جا سکتی ہے لیکن اسے آسانی کے ساتھ موہوم کام کے طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ توازن میں ڈوری، زاویائی نصف قطر طہ کے ایک چھوٹے دائرہ پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے محل میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس سے ڈوری کا ہر عنصر کرہ کی سطح پر نیچے کی جانب ہٹتا ہے چنانچہ ڈوری اب زاویائی نصف قطر طہ + فرطہ کا ایک نیا چھوٹا دائرہ بناتی ہے۔ ڈوری کا طول جبکہ وہ زاویہ طہ کا دائرہ بناتی تھی ۲ π ب جب طہ تھا، اِس میں اضافہ جبکہ طہ بدل کر



شکل (۹۲)

طہ + فرطہ ہو گیا فرطہ $\frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}}$ (۲ π ب جب طہ)

یا ۲ π ب جم طہ فرطہ ہے۔ ڈوری کو اسقدر وسیع کرنے میں جو کام ہوا وہ ت × ۲ π ب جم طہ فرطہ ہے

جہاں ت تناؤ ہے۔ کام، جاذبہ کی قوت کے خلاف (یا اِس مخصوص صورت میں جاذبہ کی قوت کی سمت میں) بھی انجام پایا ہے۔ ڈوری کے مرکز ثقل کا ارتفاع جبکہ وہ زاویہ طہ کا دائرہ بناتی تھی ب جم طہ ہے اور طہ کے طہ + فرطہ میں بدل جانے سے مرکز ثقل کے ارتفاع میں ۔ ب جب طہ فرطہ کا اضافہ ہوتا ہے اور اس لیے جاذبہ کے خلاف کئے ہوئے کام کی مقدار ۔ و ب جب طہ فرطہ

ہے ۔۔ اس طرح ہم نے چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پائے ہوئے کُل کام کو محسوب کر لیا ہے ۔ موہوم کام کے اصُول کی رو سے اِس کام کی مجموعی مقدار صفر ہونی چاہئے اور اسیلیے

$$- و ب جب طہ فرطہ + ت \times ۲\pi ب جم طہ فرطہ = ۰$$

یعنے $$ت = \frac{و}{۲\pi} مس طہ$$

اور تناؤ ت کے جواب میں ڈوری کا طول ہے

$$ا\left(۱ + \frac{ت}{لہ}\right)$$

اس لیے $$ا\left(۱ + \frac{و}{۲\pi لہ} مس طہ\right) = ۲\pi ب جب طہ$$

اس مساوات سے طہ حاصل ہوتا ہے ۔

(۱۶۰) ۲ ۔ **سائیکل کی گیرائی** ۔ دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک سیکل کی میکانیت پر موہوم کام کا اصول استعمال کرتے ہیں ۔ فرض کرو کہ کرنیک کا طول ا ہے اور فرض کرو کہ سائیکل کی گیرائی ب انچ ہے چنانچہ رکابوں (Pedals) کی ہر گردش سے سیکل اتنے آگے حرکت کرتی ہے جتنی وہ قطر ب انچ کے پہیہ کی ایک گردش میں حرکت کرتی ۔ فرض کرو کہ ہمیں وہ دباؤ معلوم کرنا ہے جو سیکل سوار ایک رکاب پر ڈالتا ہے تاکہ سیکل رگڑ کی و پونڈ وزن کی مزاحم قوت کے خلاف حرکت کر سکے ۔

فرض کرو کہ سیکل میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس میں کرنیک ایک صغیر زاویہ صہ میں سے گھومتے ہیں اور پہیئے اور سیکل بھی اس کے ساتھ آگے حرکت کرتے ہیں ۔ چونکہ گیرائی ب انچ ہے اِس لیے سیکل بہ حیثیت مجموعی $\frac{۱}{۲}$ ب صہ انچ حرکت کرے گی اور رکاب کا طے شدہ فاصلہ خود سیکل کو حوالہ کا فریم لینے سے ا صہ ہوگا ۔ فرض کرو کہ وہ قوت ق پونڈ وزن کی ہے جو رکاب پر لگانی پڑتی ہے تاکہ سیکل عین حرکت کرنے کو ہو ۔ اس لئے سیکل رکاب پر عمل

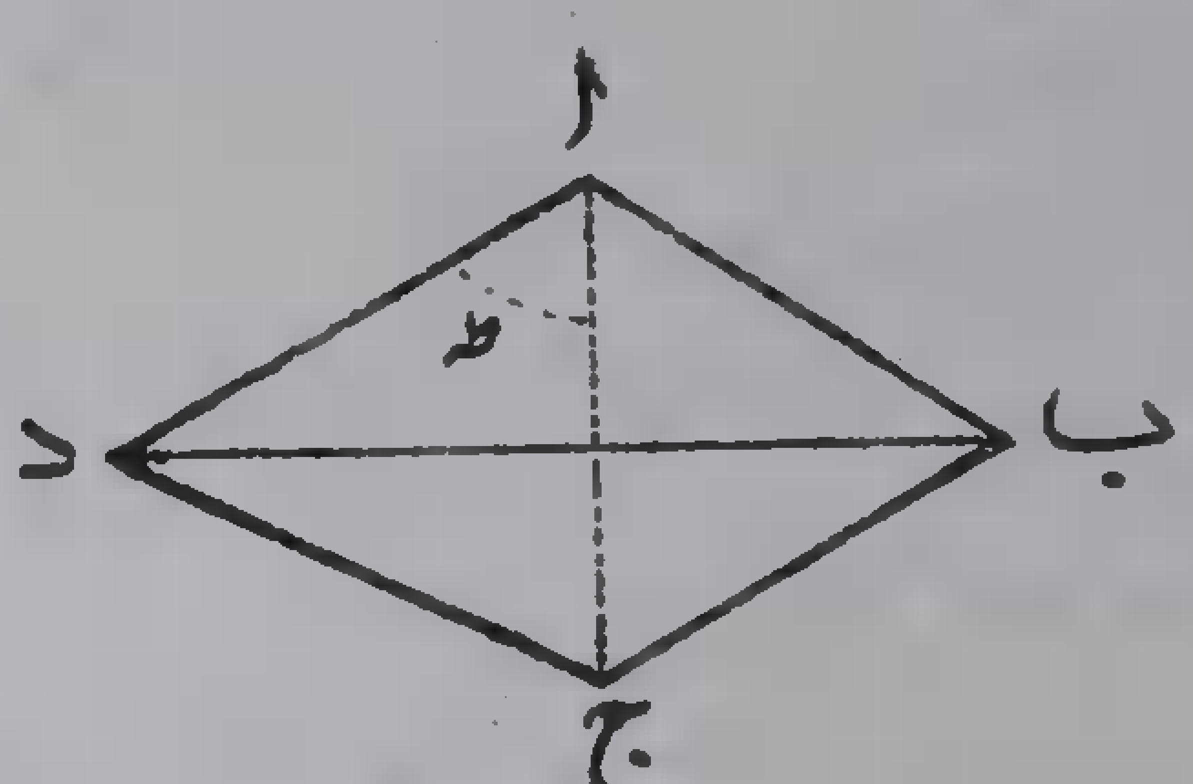
کرنے والی اِس قوت اور و پونڈ کی مخالف قوت (جو رگڑ کی وجہ سے ہے) کے
کے تحت توازن میں ہے۔ اِس لیے توازن کی مساوات ہے

وَ × ا صہ − و × ½ ب صہ = ۰

اِس لئے مطلوبہ قوت ہے وَ = ب / ۲ا و

اِس طرح یہ قوت سیکل کی گیرائی کے راست متناسب اور کرنیک کے طول کے بالعکس متناسب ہے۔

۲۔ وزن و اور طول ا کے چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ جوڑ کر ایک مُعین ا ب ج د بنایا گیا ہے۔ یہ قالب ایک افقی میز پر اِستادہ ہے اس طور پر کہ ج ا انتصابی ہے اور نقطوں ب، د کو ایک ہلکی نا امتداد پذیر ڈوری سے جس کا طول ا ہے ملایا گیا ہے تاکہ ڈنڈوں کی شکل برقرار رہے۔ اِس ڈوری کا تناؤ معلوم کرنا مقصود ہے۔



شکل (۹۳)

موہوم کام کے اصول سے تناؤ معلوم کرنے کے لیے بلاشبہ ایک ایسا چھوٹا ہٹاؤ معلوم ہونا چاہئے کہ تناؤ کے خلاف کام انجام پائے ورنہ تناؤ مساواتوں میں بالکل شریک ہی نہ ہوگا۔ چونکہ ڈوری نا امتداد پذیر ہے اِس لئے فی الواقعی اِس کو وسیع کرنا نا ممکن ہے اور اِس لئے اِس کے تناؤ کے خلاف کام کا حاصل ہونا ممکن نہیں ہے۔ لیکن ہم اِس کی نا امتداد پذیری کے باوجود اس کو وسیع شدہ خیال کر سکتے ہیں یا

ہم یہ کرسکتے ہیں کہ اس کی بجائے اسی طول اور اسی تناؤ کی ایک امتداد پذیر ڈوری رکھی ہوئی سمجھیں، صریحاً اس میں اور اول الذکر صورت میں کوئی فرق نہیں ہے۔

فرض کرو کہ قالب میں ایسا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے کہ ا، ج کی جانب نیچے دار انتصاباً حرکت کرتا ہے اور ج ساکن رہتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ ہٹاؤ ایسا ہے کہ زاویہ د ا ج، طہ سے طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ زاویہ طہ کے جواب میں ڈوری کا طول ل مساوات

ل = ۲ ا جب طہ

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو تفرق کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

فرل = ۲ ا جم طہ فرطہ

(۱۶۱) جس سے ل اور طہ کے اضافوں فرل، فرطہ کے درمیان ایک رشتہ ملتا ہے۔ اس ہٹاؤ میں ڈوری کے تناؤ (ت) کے خلاف جو کام ہوا وہ ت فرل ہے۔ کل شکل کے مرکز ثقل کا ارتفاع (ابتداً) ج کے اوپر $\frac{1}{2}$ ا ج ہے یا ا جم طہ اور اس لئے حسب دفعہ ۱۲۰ جاذبہ کے خلاف جو کام ہوا وہ

۴ و فر (ا جم طہ)

ہے۔ اس لئے اس ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے مجموعی طور پر جو کام انجام دیا وہ

۴ و فر (ا جم طہ) + ت فرل

ہے یعنے فرل اور فر (ا جم طہ) کی قیمتیں درج کرنے سے کل کام جو ہوا وہ

− ۴ و ا جب طہ فرطہ + ت × ۲ ا جم طہ فرطہ

ہے۔ توازن کے لئے اس کو معدوم ہونا چاہئے، اسلئے

ت = ۲ و س طہ

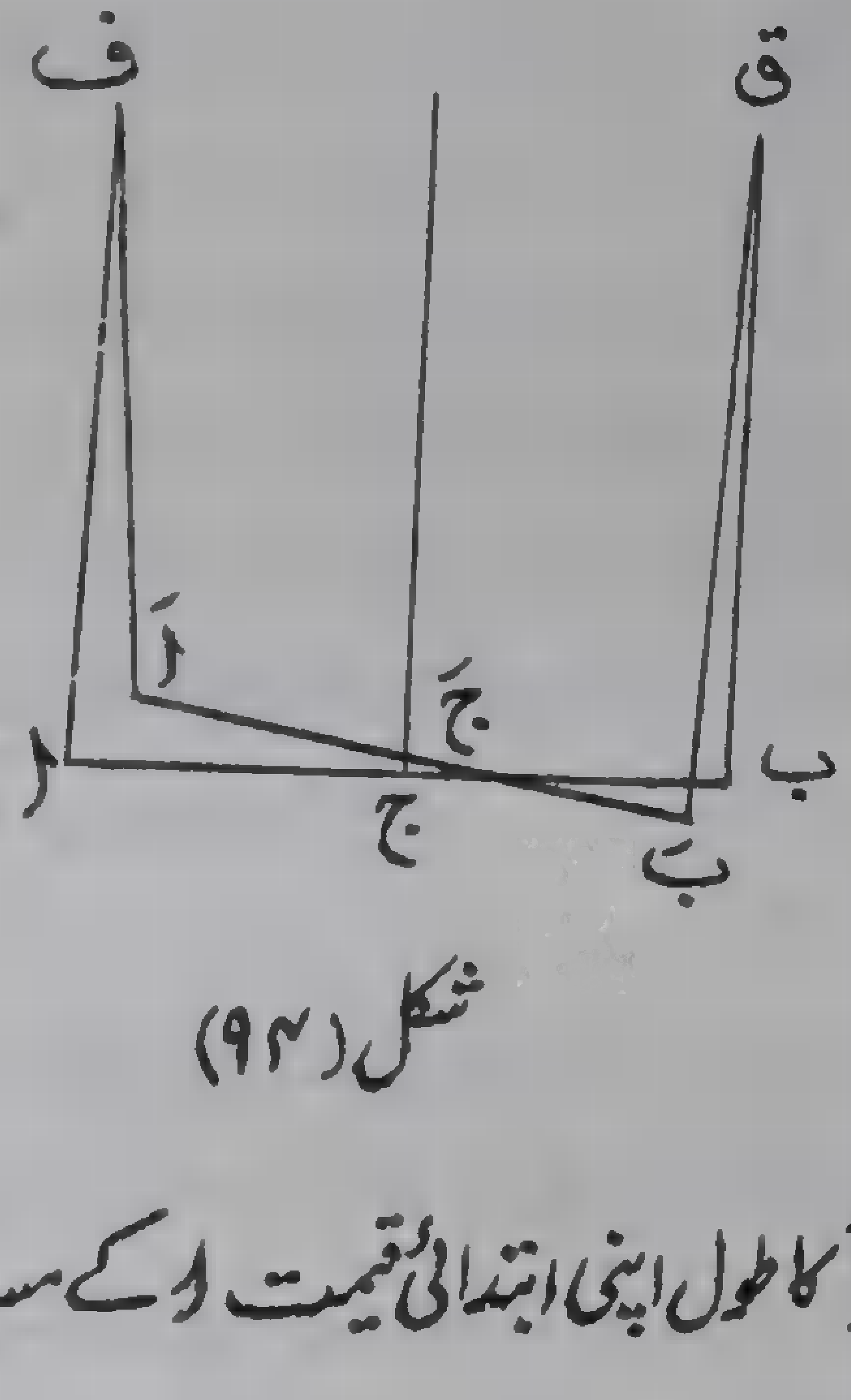
جو مطلوبہ تناؤ ہے۔

۴۔ طول ل اور وزن و کے ایک ڈنڈے کے سروں سے دو رسیاں جن میں سے ہر ایک کا طول ا ہے باندھی گئی ہیں اور ڈنڈے کو ان رسیوں کے ذریعہ دو نقطوں ف، ق سے جو ایک ہی

ارتفاع پر ہیں اور ج ن کے درمیان فاصلہ ل ہے لٹکایا گیا ہے وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈے کو ایسے محل میں رکھنے کے لئے مطلوب ہے جو اس کے توازن کے محل سے زاویہ طہ بنائے۔

توازن کی حالت میں رسیاں انتصابی رہتی ہیں اور ڈنڈے کے سرے ا، ب، نقطوں ف، ق کے ٹھیک انتصاباً نیچے رہتے ہیں۔

جب ڈنڈے کو اس کے توازن کے محل سے گھمایا جاتا ہے تو ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ اس کا وسطی نقطہ بتدریج اُس انتصابی خط پر چڑھتا ہے جو اسکے ابتدائی محل کے وسطی نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ جب ڈنڈا کسی زاویہ طہ میں سے گھوم جائے تو فرض کرو کہ یہ نقطہ جس بلندی تک چڑھا ہے وہ لا ہے۔



شکل (۹۴)

طول ف اَ کا ظل انتصابی خط پر ا ـ لا ہوگا اور ف اَ کا ظل افقی خط پر، اَ ور کے افقی ظل کے مساوی ہونے کی وجہ سے، صریحاً ل جب $\frac{طہ}{۲}$ ہوگا۔

اب چونکہ ہٹی ہوئی رسی ف اَ کا طول اپنی ابتدائی قیمت ا کے مساوی رہتا ہے اس لئے

$$ا^{۲} = (ا - لا)^{۲} + ل^{۲}\, جب^{۲} \frac{طہ}{۲} \quad ....(۱)$$

اب وہ جفت معلوم کرنے کے لئے جو ڈنڈے کو زاویہ طہ پر رکھتا ہے فرض کرو کہ ڈنڈا اس محل میں جفت گ کے زیر عمل ہے اور ایک چھوٹا ہٹاؤ واقع ہوتا ہے جس میں طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ جفت کے خلاف جو کام ہوا وہ حسب دفعہ ۱۲۱، ـ گ فرطہ کے مساوی ہے جہاں منفی علامت

اِس وجہ سے لی گئی ہے کہ جفت حرکت میں مزاحم ہونے کی بجائے اِس کی مدد کرتا ہے۔ جاذبہ کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ و فرلا ہے۔ اِس لئے توازن کی مساوات ہے

- گ فرطہ + و فرلا = ۰

فرلا اور فرطہ کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات (ل) کو تفرقی کر کے حاصل کرتے ہیں (۱۶۲)

-۲ (ا - لا) فرلا + ل² جب $\frac{طہ}{۲}$ جم $\frac{طہ}{۲}$ فرطہ = ۰

اس لئے

$$گ = و \frac{فرلا}{فرطہ}$$

$$= \frac{و ل^۲ جب \frac{طہ}{۲} جم \frac{طہ}{۲}}{۲ (ا - لا)}$$

$$= \frac{و ل^۲ جب طہ}{۴ \sqrt{ا^۲ - ل^۲ جب^۲ \frac{طہ}{۲}}}$$

جس سے مطلوبہ جفت معلوم ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ حرکت پذیر قبضوں کے ذریعہ جوڑ کر ایک مربع ا ب ج د بنایا گیا ہے۔ نقطوں ا اور ج کو ایک لچکدار ڈوری سے جس کا طبعی طول مُربع کے ایک وتر کے مساوی ہے اور جس کا مقیاس لہ ہے ملایا گیا ہے۔ نقطوں ب اور د پر کتنی قوتیں لگانی چاہئیں کہ ڈوری تن کر اپنے طول کا $\frac{۱}{۴}$ ۱ گُنا ہو جائے۔

۲۔ نصف قطر ا اور وزن و کے تین مساوی کُروں کو ایک نقطہ ف سے طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی لچکدار ڈوریوں کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ کُرے آزادانہ لٹک رہے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ف کے نیچے اِن کے مرکزوں کی گہرائی معلوم کرو۔

۳ — ایک جاپانی چھتری کی میکانیت جس سے چھتری کھلتی ہے ایسی ہے کہ جب پھسلنے والے جزو کو وسطی لکڑی پر چڑھایا جاتا ہے تو چڑھاؤ کے ہر انچ کے جواب میں چھتری کی ہر کاڑی ۵° کے زاویہ میں سے گردش کرتی ہے۔ اگر چھتری میں ۱۸ کاڑیاں ہوں جن میں سے ہر ایک کا وزن $\frac{۱}{۲}$ اونس ہو اور ان کے مراکز ثقل سہاروں سے ۱۰ انچ کے فاصلہ پر ہوں تو معلوم کرو کہ پھسلنے والے جزو کو کس قوت سے اوپر اٹھانا چاہیئے کہ چھتری کھل جائے جبکہ وسطی لکڑی انتصابی رہے اور کاڑیاں اس کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بنائیں۔

۴ — ایک گھڑی کی سوئیوں کو اوزان معادلہ کے ذریعہ متوازن کیا گیا ہے تاکہ وہ کسی محل میں توازن کی حالت میں رہ سکیں۔ جب گھڑی میں وقت ۱۰ر۵ ہوتا ہے تو ایک پرندہ جس کا وزن و ہے منٹ کی سوئی پر اس کے ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ سہارے سے ۶ فٹ ہے آکر لٹکتا ہے۔ گھنٹہ کی سوئی پر کتنی بڑی انتصابی دھکیل کی قوت سہارے سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر لگانی چاہیئے کہ توازن برقرار ہو۔

۵ — ایک گھڑی کو کوک دینے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ اس کام کے مساوی ہے جو ۲۰ پونڈ کے ایک وزن کو ۳ فٹ انتصاباً اوپر اٹھانے میں کرنا پڑتا ہے اور کوک دینے کے بعد گھڑی ۳۰ گھنٹوں تک چلتی ہے۔ گھڑی کا رقاص اور حرکت پر قابو رکھنے والا پرزہ جدا کر لئے گئے ہیں جس کی وجہ سے گھڑی کی سوئیاں بسرعت تمام گھومنے لگیں گی اگر انہیں مضبوط نہ پکڑ لیا جائے۔ منٹ کی سوئی پر کتنا بڑا جفت لگانا چاہیئے کہ یہ وقوع پذیر نہ ہونے پائے۔

۶ — ریل کے دو ڈبوں کو جوڑنے کے لیے یہ انتظام ہے کہ ان کے درمیان ایک ڈنڈا ہوتا ہے جس کے مخالف سروں پر راست دستی اور چپ دستی پیچ کٹے ہوئے ہوتے ہیں اور ڈنڈا ڈبوں میں پیوست کردہ ڈبریوں کے اندر گھوم سکتا ہے۔ اگر ہر پیچ کی گہائی ایک انچ ہو اور ڈنڈے کو ۵۶ پونڈ کی ایک ایسی قوت سے گھمایا جائے جو ۱۵ انچ لمبے بیرم کے سرے پر پورے فائدہ کے ساتھ عمل میں لائی گئی ہے تو وہ قوت معلوم کرو جس سے ڈبے ایک دوسرے کی جانب کھنچتے ہیں۔

توانائی بالقوہ

۱۲۹۔ یہ معلوم ہو چکا ہو گا کہ ہمیں کام کی دو قسموں سے واسطہ رہتا ہے۔ ایک قسم وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو جاذبہ ارض کے خلاف انجام پاتا ہے اور دوسری وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو ایک ٹرین کو ہموار سڑک پر کھینچنے میں رگڑ کے خلاف ہوتا ہے۔ اِن دو قسموں کے درمیان اصلی فرق یہ ہے کہ قسم اول کا کام اجسام کے نظام سے خود ان اجسام سے حیلی کام لیکر واپس وصول کیا جا سکتا ہے لیکن دوسری قسم کا کام جب ایک دفعہ صرف ہو چکتا ہے تو پھر کبھی حاصل نہیں ہو سکتا۔ وزن اٹھانے میں کام صرف کرنے کی بجائے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہم کام کو بطور ذخیرہ جسم میں جمع کر رہے ہیں کیونکہ وزن کو اٹھانے میں جو کام انجام پایا ہے اس کو کسی وقت بھی وزن سے واپس وصول کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ اگر ہم وزن و کو فاصلہ ف میں سے اٹھائیں تو وزن پر جو کام ہوا ہے وہ و ف ہے، اب اگر اس کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہونے کے لئے چھوڑ دیں تو وہ ہمارے لئے جو کام کرے گا وہ و ف ہو گا، اس لئے وزن پر کل کام جو انجام پایا وہ صفر کے مساوی ہے۔

برخلاف اِس کے کسی کمیت کو رگڑ کی قوت ف کے خلاف فاصلہ س تک کھینچنے میں جو کام انجام پاتا ہے وہ ف س ہے۔ اِس کمیت کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس لانے کے لیے جو کام کرنا پڑتا ہے اُس کی مقدار بھی ف س ہے اور اِس لئے کل کام جو انجام پایا ۲ ف س ہے۔ اِس سے اُس فرق کی توضیح ہوتی ہے جو کام کی اِن دو قسموں میں اور قوتوں کے اُن دو نظامات میں ہے جن کے خلاف کام انجام پاتا ہے۔

۱۳۰۔ **تعریف**۔ جب اجسام کے کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتیں اِس نوعیت کی ہوں کہ وہ کُل کام (جبری طور پر محسوب کردہ)

جو ہٹاؤں کے کسی سلسلے میں سے نظام کو اپنے ابتدائی تشکیل پر واپس لانے میں انجام پاتا ہے صفر ہو تو قوتوں کے ایسے نظام کو تحفظی نظام کہتے ہیں ۔

چونکہ کام کا جبری مجموعہ صفر ہے اس لئے نظام کو کسی تشکیل پر لیجانے میں جو کام ہوتا ہے وہ اُس کام کے مساوی لیکن علامت میں مختلف ہوتا ہے جو نظام کو اپنی ابتدائی تشکیل پر واپس ہونے کے لیے چھوڑ دینے میں انجام پاتا ہے ۔ اِس لئے کام گویا نظام میں بطور ذخیرہ جمع رہتا ہے یعنی ضائع نہیں ہوتا ۔

(۱۶۴) تھوڑے سے غور سے معلوم ہو گا کہ قوتوں کا کوئی نظام تحفظی ہو گا اگر صرف وہ قوتیں جو ذیل میں درج ہیں ایک یا زیادہ عمل کر رہی ہوں :-

(ا) جاذبہ ارض،

(ب) تعاملات جن میں تماس کامل طور پر چکنا ہو،

(ج) ڈوریوں کے تناؤ خواہ ڈوریاں امتداد پذیر ہوں یا ناامتداد پذیر

برخلاف اس کے اگر حسب ذیل نمونوں کی قوتیں ایک یا زیادہ عمل کر رہی ہوں (اِس طور پر کہ اِن کے خلاف کام انجام پائے) تو قوتوں کا نظام غیر تحفظی ہو گا :-

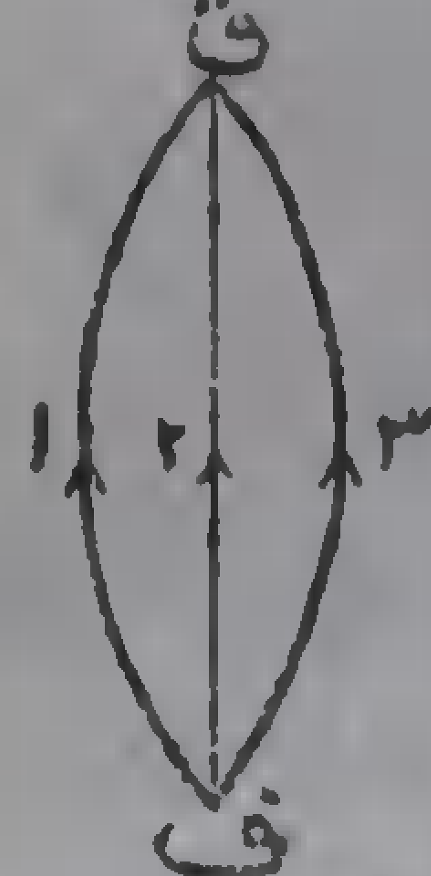
(ا) تعاملات جن میں تماس کھُردرا ہو،

(ب) ہوا کی مزاحمت ۔

۱۳۱ - مسئلہ - اگر اجسام کے ایک نظام پر تحفظی قوتیں عمل کریں اور اِن قوتوں کے خلاف اِس نظام کو ایک تشکیل ف سے دوسری تشکیل ق تک حرکت دی جائے تو نظام پر جو کام ہوتا ہے وہ اُن تشکیلوں پر منحصر نہیں ہوتا جن میں سے نظام

ف سے ق تک گذرنے میں حرکت کرتا ہے۔

اِس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ تشکیلوں کے ایک سلسلہ میں سے حرکت کرتے ہوئے ف تا ق گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ $ک_۱$ سے تعبیر کیا گیا ہے، کسی دوسرے سلسلے میں سے گذرنے میں جو کام ہوا



شکل (۹۵)

ہے وہ $ک_۲$ سے تعبیر کیا گیا ہے اور کسی تیسرے سلسلہ میں سے گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ $ک_۳$ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اگر ہم ف سے ق تک پہلے سلسلہ کے ذریعہ گذریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلہ کے ذریعہ واپس ہوں تو کُل کام جو انجام پایا صفر ہے اور اِس لئے

$$ک_۱ + ک_۳ = ۰$$

نیز اسی طرح اگر ہم ف سے ق تک دوسرے سلسلہ کے ذریعہ گذریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلہ کے ذریعہ واپس ہوں تو

$$ک_۲ + ک_۳ = ۰$$

اِس لئے $ک_۱ = ک_۲$ جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۳۲ – تعریف۔ اگر کسی تشکیل ف کو معیار کے طور پر لیا جائے تو اجسام کے کسی نظام کو تشکیل ف سے تشکیل ق تک حرکت دینے میں جو کام انجام پاتا ہے اِس کو تشکیل ق کی توانائی بالقوہ کہتے ہیں۔

اِس لئے توانائی بالقوہ اُس کام کی پیمائش کرتی ہے جو نظام کو تشکیل (۱۶۵)
ق میں لاکر رکھنے میں جمع ہوا ہے۔

مسئلہ۔ کسی نظام کو تشکیل (۱) سے تحقیقی قوتوں کے خلاف تشکیل (۲) تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ $ک_۲ - ک_۱$ ہے جہاں $ک_۱$ تشکیل (۱) کی توانائی بالقوہ اور $ک_۲$ تشکیل (۲) کی توانائی بالقوہ ہے۔

کیونکہ اگر ف معیاری تشکیل ہے تو ف تا (۱) جو کام ہوا وہ $ک_۱$ ہے ف تا (۱) جمع (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ $ک_۲$ ہے، اس لئے (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ $ک_۲ - ک_۱$ ہے۔

۲۳۱ـ مسئلہ۔ اگر اجسام کا ایک نظام، توانائی بالقوہ ک کی تشکیل میں ہو اور اگر کسی ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہوں تو ذرہ پر عمل کرنے والی حاصل قوت کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہوتے ہیں:

$$-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}} \ ,\ -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}} \ ,\ -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}}$$

اِس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس کی وجہ سے لا، ما، ی پر کا ذرہ محور لا کے متوازی فاصلہ فرلا تک حرکت کرتا ہے۔ اگر اس ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو ہٹاؤ میں جو کام ہوا ہے وہ حسب دفعہ ۱۱۸، لا فرلا کے مساوی ہے۔ یہ کام توانائی بالقوہ کے اضافے کے مساوی بھی ہے یعنی $\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}$ فرلا کے، اِس لئے

$$-\text{لا فرلا} = \frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}} \text{فرلا}$$

اس لئے $\text{لا} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}$ اور اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ما} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}}\text{ ،}\quad \text{ے} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}}$$

۱۳۴ — مسئلہ ۔ اگر اجسام کا ایک نظام، توانائی بالقوہ ک کی تشکیل میں ہو اور اگر طہ وہ زاویہ ہو جس سے نظام کے ایک استوار جسم کا محل کسی خط کے گرد حاصل ہوتا ہے تو اُستوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اِس خط کے گرِد (جبکہ اُس کو مثبت شمار کیا گیا ہو اگر گردِش کا میلان طہ کی بڑھتی ہوئی سمت میں ہے) حسب ذیل ہے:

$$-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}$$

(۱۶۶) کیونکہ فرض کرو کہ ہم جسم میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں جس کی وجہ سے زیر بحث جسم منتخبہ خط کے گرد مزید زاویہ فرطہ میں سے گھوم جاتا ہے اور اس لئے طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ توانائی بالقوہ کا اضافہ $\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}$ فرطہ ہے اور کام جو انجام پایا وہ دفعہ ۱۲۱ کے مسئلہ کی رُو سے۔ گ فرطہ کے مساوی ہے جہاں گ، محور کے گرد ان سب قوتوں کا معیار ہے جو جسم پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}\text{ فرطہ} = -\text{گ فرطہ}$$

اِس لئے

$$\text{گ} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}$$

جو مطلوبہ نتیجہ ہے۔

۱۳۵ — مسئلہ ۔ اگر اجسام کا کوئی نظام توازن کے محل میں ہے تو توانائی بالقوہ ک، یا تو اعظم ہوگی یا اقل۔

توانائی بالقوہ اُن تمام ذروں کے محددوں کا تفاعل ہے جن سے اجسام کا نظام ترکیب یافتہ ہے۔ فرض کرو کہ اِن ذروں کے محدد حسب ذیل ہیں:

$\text{لا}_1، \text{ما}_1، \text{ی}_1؛ \text{لا}_2، \text{ما}_2، \text{ی}_2؛$ وغیرہ

اگر نظام توازن کے محل میں ہے تو ہر ذرہ توازن میں ہے اور اسلئے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی حسب دفعہ ۳۲ جداگانہ معدوم ہوتے ہیں۔ اس کے لئے حسب دفعہ ۱۳۳ شرط ہے

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1} = 0،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1} = 0،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1} = 0،$$

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_2} = 0،\ \text{وغیرہ}$$

لیکن یہ ٹھیک وہی شرطیں ہیں جن کے پورا ہونے پر ک اعظم ہوتا ہے یا اقل

۱۳۶ — اِس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے۔

مسئلہ۔ اگر اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالقوہ کسی تشکیل میں اعظم یا اقل ہو تو یہ تشکیل توازن کی ہوگی۔

کیونکہ دفعہ گذشتہ کی ترقیم اختیار کی جائے اور اگر ک اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1} = 0،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1} = 0،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1} = 0$$

چونکہ $-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1}،\ -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1}،\ -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1}،$ اُس قوت کے (۱۶۷)

اجزائے ترکیبی ہیں جو ذرہ (۱) پر عمل کرتی ہے اس لیے اوپر کی مساواتوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ذرہ توازن میں ہے۔ اسی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دوسرے ذرے بھی توازن میں ہیں چنانچہ مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۱۳۷ — اِن مسئلوں کی ایک خاص اہم صورت اُس وقت پیدا ہوتی ہے

جبکہ کسی ہٹاؤ میں کام انجام دینے والی قوتیں صرف اُن اجسام کے اوزان ہوں جن سے نظام ترکیب یافتہ ہے۔ اگر کُل نظام کی کمیت ک ہو اور کسی معیاری افقی مستوی کے اوپر اس کے مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہو تو توانائی بالقوہ حسب دفعہ ۳۱ کہ ج ف ہوگی اور وہ اعظم یا اقل ہوگی بموجب اس کے کہ ف اعظم یا اقل ہو۔ اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر اجسام کے کسی نظام میں وہ قوتیں جو ہٹاؤ میں کام انجام دیتی ہیں صرف جاذبہ کی قوتیں ہوں تو اس نظام کے توازن کی تشکیلات وہ ہوں گی جنمیں مرکز ثقل کا ارتفاع اعظم یا اقل ہوگا۔

مثالیں

۱۔ دو یکساں ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ل ہے سروں پر آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ ان کو نصف قطر ا کے ایک چکنے اسطوانے پر رکھا گیا ہے جس کا محور افقی ہے۔ وہ زاویہ معلوم کرو جو ڈنڈے اُفق سے بناتے ہیں جبکہ وہ توازن میں ہوں۔

۲۔ ایک ناقصی قرص کو اس طور پر وزنی بنایا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل اس کے مرکز اور اس کے محور اعظم کے ایک سرے کے درمیان وسط میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کا خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ سے بڑا ہو تو توازن کے چار محل ہوں گے جن میں قرص ایک افقی مستوی پر انتصاباً کھڑا ہوگا لیکن اگر خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ سے بڑا نہ ہو تو توازن کے صرف دو محل ہوں گے۔

۳۔ وزن و کا ایک ڈنڈا افقی ہے، اس کو مرکز ثقل تک ایک ثابت انتصابی پیچ سے جس کے گرد وہ گردش کرتا ہے، چھیدا گیا ہے۔ ایک گردش سے ڈنڈا بقدر $\frac{1}{2}$ انچ کے اوپر اٹھتا یا نیچے اترتا ہے۔ اگر رگڑ نہ ہو تو وہ جفت معلوم کرو جو اس کو ساکن رکھنے کے لیے مطلوب ہے۔

۴۔ وزن و کا ایک ڈاٹ مخروط مضلع کی شکل کا ہے جس کی عمودی تراش

مُربع ہے۔ اِس کو ضلع ج کے ایک مُربع سوراخ میں اِس طرح رکھا گیا ہے کہ اِس کا محور انتصابی ہے اور اِس محل میں اِس کے راس کی گہرائی تماس کے مُستوی کے نیچے گ ہے۔ وہ جفت معلوم کرو جو اِس کو زاویہ طہ میں سے گھما ہوا رکھنے کے لیے مطلوب ہے دراں حالیکہ اِس کا محور انتصابی ہی رہے۔

۵۔ ایک چکنے مکافی تار کو انتصابی محور کے ساتھ رکھا گیا ہے۔ اِس میں دو منکے پروئے گئے ہیں جن کو ایک ڈوری مربوط کرتی ہے جو ماسکہ پر کے ایک حلقہ میں سے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے محلوں کی تعداد لاتناہی ہے۔

۶۔ ایک چکنا پیالہ ناقص نما کی شکل کا ہے۔ اِس کے نیم محور ا، ب، ج ہیں اور ایک محور انتصابی ہے۔ وہ جفت معلوم کرو جو طول ل کے ایک ڈنڈے کو پیالے کے اندر افقی محل میں رکھنے کے لیے جو توازن کے محل سے زاویہ طہ بنائے مطلوب ہے۔

توانائی بالحرکت

(۱۶۸) ۱۳۸۔ فرض کرو کہ ایک متحرک ذرہ پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کی سمت ذرہ کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے۔ اِس قوت کا اثر حرکت کے دوسرے قانون کی بموجب یہ ہوگا کہ ذرہ کی رفتار میں ابطا پیدا ہوگا۔ ذرہ کی رفتار گھٹتی جائے گی جب تک کہ قوت عمل کرے گی اور اگر قوت کافی وقت تک عمل کرنا جاری رکھے تو ذرہ کو آخرالامر ساکن ہو جانا چاہیئے۔

مثلاً ایک کیلے پر غور کرو جس کو ہتھوڑی سے ایک تختہ میں ٹھونکا جا رہا ہے ہتھوڑی اور کیلے کے درمیان تعامل ایک قوت ہے جس کی سمت ہتھوڑی کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے اور یہ قوت آخرالامر ہتھوڑی کو ساکن کر دیتی ہے۔ نیز جب کسی ذرہ کو اوپر وار انتصاباً پھینکا جاتا ہے تو اس کا وزن کچھ وقفہ کے بعد اِس کو بالآخر ساکن کرتا ہے جس کے بعد وہ زمین پر واپس گرتا ہے۔

اُس اثناء میں جس میں متحرک جسم قوت کے عمل سے ساکن ہو جاتا ہے قوت کا نقطۂ عمل جو متحرک جسم کے ساتھ حرکت کر چکا ہے کوئی فاصلہ طے کر چکا ہوگا۔

اِس لیے متحرک جسم نے کچھ کام کیا ہے ۔ پس ہم جسم کی حرکت کے تخیل پر پہنچتے ہیں جس میں کام کرنے کی قابلیت ہے ۔

مثلاً پچھلی مثالوں میں ہتھوڑی کی حرکت نے کیلے کو تختہ میں گاڑ دیا اور ذرہ کی حرکت نے جس کو ہوا میں اُچھالا گیا تھا ذرہ کو زمین کی سطح کے اوپر کچھ بلندی تک اُٹھایا۔

۱۲۹ ۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ رفتار و سے حرکت کر رہا ہے اور اس کی حرکت میں ایک قوت ف (مطلق اکائیوں میں) مزاحم ہے جو ذرہ کی حرکت کی سمت کی مخالف سمت میں عمل کر رہی ہے ۔ فرض کرو کہ اِس قوت کے خلاف ذرہ نے فاصلہ فرس وقت فرت میں طے کیا ہے اور فرض کرو کہ اِس وقفہ میں اس کی رفتار و سے بدل کر و ۔ فرو ہو گئی ہے ۔ اب ذرہ اپنی حرکت کی سمت میں $\frac{فرو}{فرت}$ کا ابطاء رکھتا ہے یعنے $\frac{فرو}{فرت}$ کا اسراع اُس سمت میں جس میں قوت ف عمل کر رہی ہے، اِس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

$$ف = ک \frac{فرو}{فرت}$$

(۱۶۹) اِس لیے ذرہ نے قوت ف کے خلاف فاصلہ فرس طے کرنے میں جو کام کیا ہے وہ حسب ذیل ہے :

$$ف\ فرس = ک \frac{فرو}{فرت}\ فرس$$

یا چونکہ $\frac{فرس}{فرت}$ وہی ہے جو ذرہ کی رفتار ہے اسلیے

$$ف\ فرس = ک\ و\ فرو$$

تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ کا کل کام ساکن ہونے سے پیشتر حسب ذیل ہے :

$$\int ف\ فرس = \frac{1}{2} ک\ و^2 \quad \ldots\ldots\ldots (۳۶)$$

چونکہ قوت ف کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کیا گیا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے (دفعہ ۱۱۱) کہ کام $\frac{1}{2}$ ک و^2 کی پیمائش بھی مطلق اکائیوں میں ہوتی ہے اس لیے اُس قوت کی مقدار خواہ کچھ ہی ہو جو ذرہ کی حرکت میں مزاحم ہے ذرہ نے ساکن ہونے سے پیشتر جو کام کیا ہے وہ وہی رہتا ہے یعنے $\frac{1}{2}$ ک و^2 کام کی مطلق اکائیاں۔

مقدار $\frac{1}{2}$ ک و^2 (مطلق اکائیوں میں پیمائش کردہ) کو متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت کہتے ہیں۔ یہ اُس کام کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ ساکن ہونے سے پیشتر انجام دے سکتا ہے۔

شلاً فرض کرو کہ وہ مزاحمت جو کیلے کو تختہ میں نصب کرنے میں پیش ہوتی ہے ۵۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے یعنی ۵۰۰۰ پونڈ کا وزن کیلے کو تختہ میں دبانے کے لئے مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ اس کو تختہ میں ہتھوڑی سے مار کر گھسایا جاتا ہے فرض کرو کہ ہتھوڑی کا سرا ۱۰ پونڈ وزنی ہے اور اُس کی ہر ضرب کیلے پر ۵۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پڑتی ہے۔ فرض کرو کہ ہر ضرب پر کیلا تختہ میں فاصلہ س تک (فٹوں میں پیمائش کردہ) گھستا ہے۔ تب ہتھوڑی نے ہر ضرب پر جو کام انجام دیا ہے وہ اُس کام کے مساوی ہے جو ۵۰۰۰ پونڈ وزن ۔ یا ۵۰۰۰ × ج پونڈل ۔ کی ایک قوت کو فاصلہ س میں سے حرکت دینے میں ہوتا ہے۔ اس لیے یہ کام ۵۰۰۰ فٹ پونڈلوں کے مساوی ہے۔ ہتھوڑی کی توانائی بالحرکت ہے

$$\frac{1}{2} \text{ک و}^2 = \frac{1}{2} \times ۱۰ \times ۵۰^2 = ۱۲۵۰۰،$$

مطلق فٹ پاؤنڈ ثانیہ اکائیوں میں۔ اِس لیے رشتہ (۳۶) کی رُو سے

$$۵۰۰۰ \text{ ج س} = ۱۲۵۰۰$$

جس میں چونکہ اکائیاں فٹ پونڈ ثانیہ ہیں اس لیے ج = ۳۲ لیا جا سکتا ہے اور اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{س} = \frac{۲۵}{۳۲۰} \text{ فٹ} = \frac{۱۵}{۱۶} \text{ انچ}$$

۱۴۰ — مسئلہ۔ اگر قوتوں کے کسی نظام کے تحت ایک ذرہ حرکت کرے تو اس کی حرکت کی اثنا میں توانائی بالحرکت کا اضافہ اُس کُل کام کے مساوی ہوتا ہے جو ذرہ پر بیرونی عوامل کرتے ہیں۔ (۱۴۰)

فرض کرو کہ ہم ایک محل ف سے دوسرے محل ق تک ذرہ کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ان نقطوں پر ذرہ کی رفتاریں علی الترتیب وف اور وق ہیں۔

فرض کرو کہ ہم اس راستہ کے کسی عنصر فرس کا امتحان کرتے ہیں اور فرض کرو کہ اس عنصر کے آغاز اور اختتام پر ذرہ کی رفتاریں و اور و + فرو ہیں۔ فرض کرو کہ ف وہ قوت یا قوت کا جزو ترکیبی ہے جو سمت فرس میں ذرہ پر عمل کرتی ہے جبکہ وہ اپنے راستہ کا عنصر فرس مرتسم کرتا ہے۔ اگر راستہ کے اس وقفہ کے مرتسم کرنے میں وقت فرت صرف ہو تو اسراع $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ ہے اور چونکہ حرکت کی سمت میں عمل کرنے والی قوت ف ہے اس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے

$$\text{ف} = \text{ک}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۳۹

$$\text{ف فرس} = \text{ک}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\,\text{فرس}$$

$$= \text{ک}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\,\text{فرو}$$

$$= \text{ک و فرو}$$

ف سے ق تک پورے راستہ پر تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{ف}^{ق} ف\ فرس = ک \int_{ف}^{ق} و\ فرو = \frac{1}{2} ک\ و_{ق}^{2} - \frac{1}{2} ک\ و_{ف}^{2} \quad ...(۳۷)$$

= توانائی بالحرکت میں اضافہ

اِس مساوات کی دائیں جانب کا جملہ اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو ذرہ پر ہوا ہے اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ ثابت ہو چکا۔

۱۴۱ — بیرونی قوتوں نے ذرہ پر جو کام کیا ہے اُس کو منفی علامت کے ساتھ اُس کام کے مساوی تصور کیا جا سکتا ہے جو ذرہ بیرونی قوتوں پر کرتا ہے کیونکہ اگر ف وہ قوت ہے جو ذرہ پر سمت فرس میں عمل کرتی ہے تو عمل اور تعامل کی مساویت سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ بیرونی عوامل پر ذرہ سے عمل کرنے والی قوت ۔ف ہے اور اس لیے ذرہ نے کل کام ۔ف فرس کیا ہے ۔اِس لیے مسئلہ کو حسب ذیل متبادل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے: (۱۷۱)

قوتوں کے کسی نظام کے تحت ذرہ کی حرکت کی اثنا میں توانائی بالحرکت کی تخفیف اُس کُل کام کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ بیرونی عوامل کے خلاف انجام دیتا ہے۔

۱۴۲ — اگر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی نظام ہو تو $-\int_{ف}^{ق}$ ف فرس کی یعنے بیرونی عوامل پر ذرہ کے کل کام کی قیمت حسب دفعہ ۱۳۲ $ک_{ق} - ک_{ف}$ کے مساوی ہے پس مساوات (۳۷) ہو جاتی ہے

$$ک_{ق} - ک_{ف} + \frac{1}{2} ک (و_{ق}^{2} - و_{ف}^{2}) = ۰$$

یا
$$ک_{ق} + \frac{1}{2} ک\ و_{ق}^{2} = ک_{ف} + \frac{1}{2} ک\ و_{ف}^{2} \quad (۳۸)$$

اِس لیے ف پر توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ وہی ہے

جوان کا ف پر ہے، اور اِس لیے مسئلہ ثابت ہے۔

توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کے مجموعہ کو ذرہ کی کُل توانائی کہتے ہیں۔

توانائی کا بقا

۱۴۳ — اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت صریحاً اس کے مختلف ذروں کی توانائیوں بالحرکت کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ نظام کی توانائی بالقوہ جیساکہ ہم دیکھ چکے ہیں اِس کے ذروں کی توانائیوں بالقوہ کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

اِس لیے کسی نظام کی کُل توانائی اِس کے مختلف ذروں کی کل توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ چونکہ ہر ذرہ کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نظام کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے۔

اِس واقعہ کو کہ کُل توانائی مستقل رہتی ہے **توانائی کا بقا** کہتے ہیں۔

اُس مساوات کو جو اِس امر کو ظاہر کرے کہ ایک لمحہ پر کی کُل توانائی کسی دوسرے لمحہ پر کی کُل توانائی کے مساوی ہے **توانائی کی مساوات** کہتے ہیں۔

۱۴۴ — تمثیلاً فرض کرو کہ منجنیق سے ایک پتھر پھینکا جاتا ہے۔

اولاً منجنیق کی لچکدار رسی کے تنانے میں کام انجام پاتا ہے اور یہ کام تنی ہوئی
رسی کی توانائی بالقوہ کے طور پر جمع ہوتا ہے۔ جب منجنیق کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو رسی کا (۱۷۲)
تناؤ پتھر پر عمل کرتا ہے اور پتھر اِس تناؤ کے اسراع پیدا کرنے والے اثر کے تحت حرکت کرتا ہے اور رسی کا تناؤ گھٹتا ہے۔ اِس عمل کے اثنا میں پتھر توانائی بالحرکت حاصل کرتا جاتا ہے اور تنی ہوئی رسی توانائی بالقوہ کھوتی جاتی ہے۔ اوپر ثابت شدہ مسئلہ کی رو سے وہ توانائی بالحرکت جو پتھر حاصل کرتا ہے اُس توانائی بالقوہ کے عین مساوی ہے جو رسی کھوتی ہے۔

جب پتھر منجنیق سے نکلتا ہے تو رسی کی توانائی بالقوہ کا بیشتر حصہ پتھر کی توانائی بالحرکت میں مستحیل ہو جاتا ہے۔ اِس کے بعد پتھر کی حرکت کی اثنا میں توانائی کا ایک اور استحالہ

وقوع پذیر ہوسکتا ہے چنانچہ اگر پتھر اوپر وار حرکت کرتا ہے تو اِس کی توانائی بالقوہ بڑھتی ہے اور اِس لیے اِس کے جواب میں اس کی توانائی بالحرکت گھٹنی چاہیئے۔ اِس کی چال سُست پڑنی چاہیئے۔ برخلاف ازیں اگر پتھر نیچے وار حرکت کرتا ہے تو توانائی بالقوہ گھٹیگی اور اِس لیے اِس کی توانائی بالحرکت بڑھے گی۔ اِس کی رفتار میں اضافہ ہوگا۔

۱۴۵۔ توانائی کے بقا کے اصول سے ایک بہت اہم نتیجہ حسب ذیل حاصل ہوتا ہے:

مسئلہ۔ اگر ایک ذرہ کسی چکنے منحنی پر پھسلے اور اِس پر سوائے جاذبہ اور منحنی کے تعامل کے کوئی اور قوتیں عمل نہ کریں اور اگر اِس کے راستہ کے دو نقطوں ف، ق پر رفتاریں ع، و ہوں تو

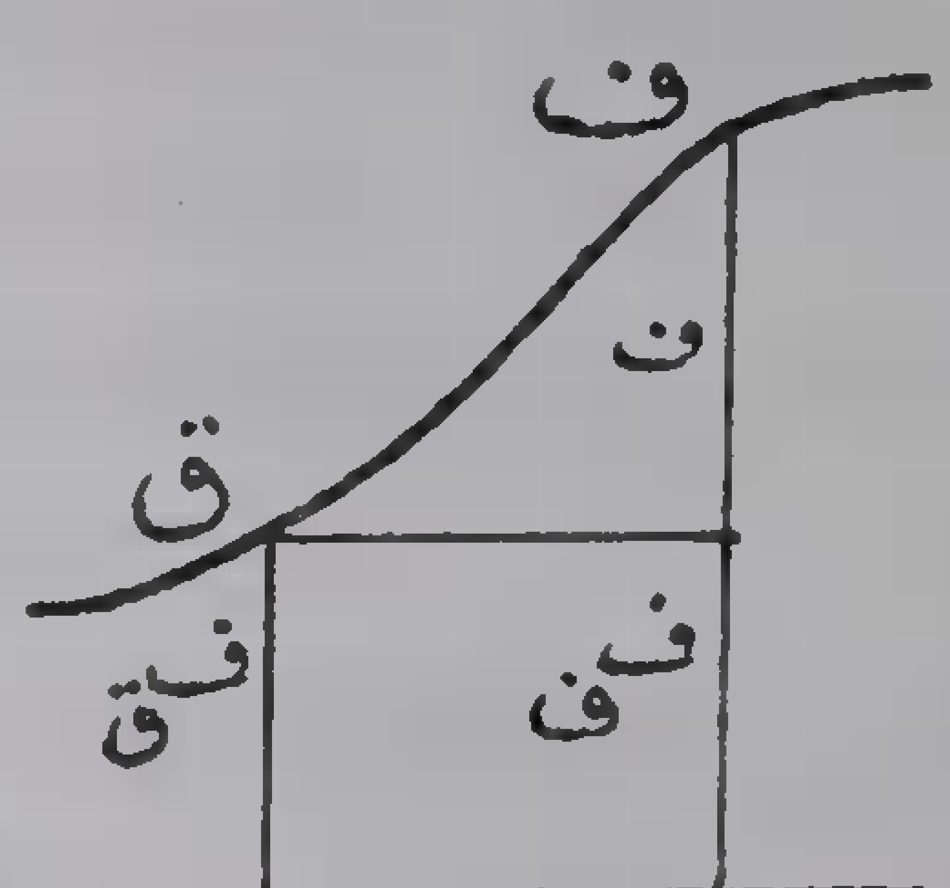
$$و^2 = ع^2 + ۲ ج ف \quad \ldots\ldots (۳۹)$$

جہاں ف کے نیچے ق کا انتصابی فاصلہ ف سے تعبیر کیا گیا ہے یعنی راستہ ف ق کا انتصابی ظل ف ہے۔

فرض کرو کہ کسی افقی مستوی کے اوپر مثلاً زمین کی سطح کے اوپر ف اور ق کے ارتفاع $ف_ف$، $ف_ق$ ہیں۔ جب ذرہ ف پر ہوتا ہے تو اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}ک ع^2$ اور توانائی بالقوہ $ک ج ف_ف$ ہے۔ اِس لیے اس کی توانائی

$$\frac{1}{2}ک ع^2 + ک ج ف_ف$$

ہے۔ اسی طرح ق پر اسکی کل توانائی



شکل (۹۶)

$$\frac{1}{2}ک\ د^2 + ک\ ج\ ف_ق$$

ہے۔

اب چونکہ عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی ہے اسلیے کل توانائی غیر متغیر رہتی ہے۔ اس لیے

$$\frac{1}{2}ک\ ع^2 + ک\ ج\ ف_ف = \frac{1}{2}ک\ د^2 + ک\ ج\ ف_ق$$

اس لیے $د^2 - ع^2 = ۲ ج (ف_ف - ف_ق) = ۲ ج ف$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۱۷۳) **۱۴۶** — دفعہ ۱۴۵ کا مسئلہ صریحاً درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اوپر وار حرکت کر رہا ہو، اِس صورت میں ف منفی ہوگا۔ اسی طرح یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اپنے راستہ کے کچھ حصہ میں اوپر چڑھے اور باقی حصہ میں نیچے اترے۔ مزید بریں ذرہ قوتوں کے کسی بقائی نظام کے تحت حرکت کر سکتا ہے صرف اِس شرط کے ساتھ کہ کُل توانائی بالقوہ ذرہ کے وزن سے پیدا ہونی چاہئیے۔ اِس صورت میں بھی مسئلہ بالا درست رہتا ہے۔

مثالاً یہ مسئلہ درست ہے جبکہ ذرہ ایک ناامتداد پذیر رسی سے بندھا ہو یا خلاء میں آزادانہ حرکت کرے۔

اِس مسئلہ کا استعمال سمجھنے کیلئے فرض کرو کہ ایک سیکل سوار پندرہ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک پہاڑی کی چوٹی پر پہنچتا ہے جس کا ارتفاع ۶۰ فٹ ہے اور ساتھ ہی پہاڑی کے نیچے اُترنے لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہاڑی کے دامن میں اس کی رفتار معلوم کرنا چاہتے ہیں اس مفروضہ کی بناء پر کہ رگڑ، ہوا کی مزاحمت وغیرہ نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

پہاڑی کی چوٹی اور دامن کو نقاط ف، اور ق (دیکھو مسئلہ بالا) لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ف = ۶۰ فٹ

ع = ۱۵ میل فی گھنٹہ = ۲۲ فٹ فی ثانیہ

اس لیے فٹ ثانیہ اکائیاں استعمال کرنے سے

و² = ع² + ۲ج ف = ۲۲² + ۲ × ۳۲ × ۶۰

= ۴۳۲۴

اِس لیے و = ۶۶ فٹ فی ثانیہ تقریباً

= ۴۵ میل فی گھنٹہ

اِس طرح سیکل سوار کی رفتار جبکہ رگڑ یا ہوا کی مزاحمت نہ ہو ۴۵ میل فی گھنٹہ ہوگی ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک آٹو موبیل جو ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے ایک ڈھلوان پہاڑی کے پائین پر پہنچتی ہے اور اُسی آن اس کے انجن کو بند کر دیا جاتا ہے ۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر گاڑی پہاڑی پر کتنے ارتفاع تک پہنچیگی (رگڑ وغیرہ نظر انداز کرو) ۔

۲ ۔ ایک مزدور اینٹوں کو ۱۰ فٹ ارتفاع پر ایک معمار کے پاس پہنچاتا ہے ۔ وہ اِن کو اِس طرح پھینکتا ہے کہ وہ ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے معمار کے پاس پہنچتی ہیں ۔ مزدور اپنے کام کو کس تناسب میں بچا سکتا ہے اگر وہ اینٹوں کو اس طرح پھینکے کہ وہ معمار کے پاس عین پہنچ سکیں ۔

۳ ۔ ۳ ٹن کمیت کی ایک توپ گاڑی ' افقی مستوی پر ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پیچھے دھکا دیتی ہے ۔ وہ یکساں دباؤ معلوم کرو جو اس کو ۳ فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دینے کے لیے اس پر لگانا پڑے گا ۔

۴ ۔ ۲۰۰۰ ٹن کے ایک جہاز کو جو ۳۰ فٹ فی منٹ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے جہازی رسی کے ذریعہ ۲ فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دیا گیا ہے ۔ معلوم کرو کہ رسی کو کتنی کھینچ برداشت کرنی پڑی ۔

۵ ۔ ایک سیکل اور سیکل سوار ۲۰۰ پونڈ وزنی ہیں ۔ سیکل سوار ہموار سڑک پر (۱۷۴)
۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے سیکل چلاتا ہے اور اچانک بریک ڈالتا ہے جو ٹائر کو ایک ایسی قوت سے دباتا ہے جو ۵۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے ۔ اگر بریک

اور ٹائر کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{3}$ ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر سیکل کتنی دُور جائے گی۔

۶۔ مثال ماسبق میں سیکل کتنی دور جائے گی اگر سڑک ہموار ہونے کی بجائے ۲۰ میں ا ڈھلوان ہو۔

۷۔ ایک گولی کو ۱۰۰۰ فٹ ثانیہ کی رفتار سے فائر کرنے پر وہ لکڑی کے ایک کندے میں بارہ انچ گہرائی تک گھُس جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُسے اُسی لکڑی کے دو انچ موٹے تختے میں سے فائر کیا جائے تو خروج پر اس کی رفتار تقریباً ۹۱۳ فٹ فی ثانیہ ہوگی۔ (مان لو کہ لکڑی کی مزاحمت گولی پر مستقل ہے)۔

۸۔ دو مساوی وزن ف اور ف ایک رسی کے ذریعہ جو دو چکنی چرخیوں ا اور ب پر سے گذرتی ہے سہارے گئے ہیں اور ایک وزن و (= $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ف) ا اور ب کے درمیان ڈوری کے وسطی نقطہ پر باندھا گیا ہے۔ ا اور ب ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ و اترنا جاری رکھے گا تاآنکہ و ا ب ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائے۔ اس کے بعد کیا واقع ہوگا؟

۹۔ طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی ایک ڈوری کو ایک ہی افقی خط میں کے دو نقطوں ا اور ب کے درمیان جن کا باہمی فاصلہ ف ہے لٹکایا گیا ہے اور اس کے وسطی نقطہ پر وزن و بندھا ہے۔ وزن و کو ا اور ب کے درمیان وسط میں پکڑ کر دفعتاً چھوڑ دیا گیا۔ معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ میں سے وہ گرے گا قبل اس کے کہ ڈوریاں اُسے ساکن کردیں۔

۱۰۔ ایک وزنی ذرہ طبعی طول ل کی ایک ڈوری سے لٹکتا ہے اور اس کو طول ل′ تک تنا دیتا ہے، ڈوری کا دوسرا سرا ثابت ہے۔ ذرہ کو سہارے کے نقطہ کے نیچے طول ۲ ل′ تک کھینچکر چھوڑ دیا گیا۔ کتنے اوپر وہ چڑھے گا۔

۱۱۔ وہ اسپی طاقت معلوم کرو جو ایک دریا کی توانائی بالحرکت سے اُس مقام پر حاصل کی جا سکتی ہے جہاں اس کا عرض ۱۰۰ فٹ، اوسط گہرائی ۲۰ فٹ، اور اوسط رفتار $\frac{1}{2}$ ۴ میل فی گھنٹہ ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا

وزن ۵ء۶۲ پونڈ ہے)۔

۱۲۔ اگر (مثال ماسبق) دریا ایک آبشار پر جس کی تہ دریا کی تہ سے ۵۰ فٹ نیچے ہے ختم ہو تو وہ اسپی طاقت معلوم کرو جو پانی سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

۱۳۔ ایک انجن (حرّاکہ) میں $\frac{1}{2}$ ۱ پونڈ کوئلہ فی اسپی طاقت ساعت جلتا ہے جاذبہ رگڑ، وغیرہ پر غالب آنے میں جتنا کوئلہ خرچ ہوتا ہے اسکو چھوڑ کر معلوم کرو کہ کتنا کوئلہ جلانا چاہیے کہ ۲۰۰ ٹن وزنی ٹرین میں ۵۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار پیدا ہوسکے۔

قائم اور غیر قائم توازن

۱۴۷۔ فرض کرو کہ ایک نظام توازن کے محل میں ساکن ہے اور وہ اس محل سے صرف ایک راستہ پر حرکت کرنے کے قابل ہے جس کی دو سمتوں میں سے کسی سمت میں وہ حرکت کرسکتا ہے۔ اس قسم کے نظام کی مثالیں حسب ذیل ہیں: انجن جو پٹریوں پر کھڑا ہو، دروازہ جو ایک قبضہ کے گرد گھوم سکتا ہو، منکا جو ایک تار میں پھسلتا ہو۔ نظام پر بقائی قوتوں کی کوئی تعداد عمل کرسکتی ہے لیکن ان قوتوں کے تحت نظام کو توازن کے محل میں ہونا چاہیے (۱۷۵)

فرض کرو کہ توازن کا محل ف سے تعبیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ تشکیل ف میں نظام کی توانائی بالقوہ کـف ہے۔ فرض کرو کہ لا کوئی مقدار ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نظام کی تشکیل، ف سے کتنی دور حرکت کرچکی ہے۔ مثلاً لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہوسکتا ہے جو انجن پٹریوں پر طے کرچکا ہے، لا سے وہ زاویہ تعبیر ہوسکتا ہے جس میں سے دروازہ اپنے قبضوں کے گرد گھوم چکا ہے یا لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہوسکتا ہے جو منکا تار پر طے کرچکا ہے۔ لا کی قیمت مثبت ہوگی جبکہ نظام ایک سمت میں حرکت کرے اور منفی ہوگی جبکہ وہ دوسری سمت میں حرکت کرے۔

جب نظام اپنے توازن کی تشکیل ف سے حرکت کرتا ہے تو لا کی قیمت بدلے گی۔ توانائی بالقوہ ک کی قیمت بھی بدلے گی اور چونکہ وہ صرف لا کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے جبکہ قوتیں بقائی ہوں اس لیئے ہم

کہہ سکتے ہیں کہ ک، لا کا ایک تفاعل ہے۔
ایک مشہور مسئلہ کی بموجب ہم ک کو لا کی قوتوں میں شکل

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \text{لا}\left(\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}} + \ldots\ldots \quad (۴۰)$$

میں پھیلا سکتے ہیں جس میں زیر تحریر ف اس امر کو تعبیر کرتا ہے کہ اُس مقدار کو تشکیل ف میں محسوب کرنا چاہئے جیسا کہ $\text{ک}_{\text{ف}}$ کی صورت میں فرض کیا جا چکا ہے۔ اب چونکہ تشکیل ف کو توازن کا محل فرض کیا گیا ہے اس لیے دفعہ ۱۲۵ کی رُو سے

$$\left(\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ف}} = ۰$$

اور اِس لیے مساوات (۴۰) ہو جاتی ہے

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}} + \ldots\ldots\ldots \quad (۴۱)$$

اب ف سے قریب تشکیلات کے لیے، لا چھوٹا ہے اور اس لیے مساوات (۴۱) کی رقم $\frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ اگرچہ خود چھوٹی ہے تاہم لا^3، لا^4 وغیرہ والی ارقام کے مقابلہ میں جو اس کے بعد آتی ہیں بہت بڑی ہے۔ اس لیے ف سے قریب تشکیلات کے لیے ہم اِن آخری رقموں کو بالکل نظر انداز (۱۲۶) کر سکتے ہیں اور اِس لیے مساوات کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں:

$$\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}} = \frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}} \ldots\ldots\ldots \quad (۴۲)$$

اب $\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ کی قیمت مثبت ہو سکتی ہے یا منفی۔
اگر وہ مثبت ہے تو $\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}}$ مثبت ہے خواہ لا کی کچھ ہی قیمت ہو اور اس لیے ف سے قریب ہر تشکیل میں توانائی بالقوہ ک،

تشکیل ف کی توانائی بالقوہ سے بڑی ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں ک، ف پر اقل ہے۔

اسی طرح اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف$ منفی ہے تو لا کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لیے ک - ک$_ف$ منفی ہے اور اس لیے ک، ف پر اعظم ہے۔

۱۴۸ — اب فرض کرو کہ نظام کو ف سے قریب کسی محل میں ساکن رکھا گیا ہے۔ یہ تشکیل توازن کی تشکیل نہیں ہے اور اس لیے نظام ساکن نہیں رہ سکتا۔ وہ سمت معلوم کرنے کے لیے جس میں وہ حرکت کرنے لگے گا ہمیں صرف یہ دیکھنے کی ضرورت ہے کہ جب نظام حرکت کرتا ہے تو وہ توانائی بالحرکت حاصل کرتا ہے اور چونکہ یہ توانائی حسب دفعہ ۱۴۳ اسکی توانائی بالقوہ کے بدلے میں حاصل ہونی چاہیئے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نظام ایک ایسی سمت میں حرکت کرنے لگے گا کہ اس کی توانائی بالقوہ گھٹے گی۔

مساوات (۴۲) پر نظر ڈالنے سے معلوم ہوگا کہ یہ سمت ف کی جانب ہے یا اس کے مخالف۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف$ مثبت ہے تو لا^2 کی قیمت گھٹنی چاہیئے۔ اور اس لیے حرکت ف کی جانب ہونی چاہیئے خواہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اسی طرح اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف$ منفی ہے تو لا^2 کی قیمت بڑھنی چاہیئے اور اس لیے حرکت ہمیشہ ف سے دور ہوگی۔

اس طرح معلوم ہو چکا کہ اگر نظام کو ف سے قریب کسی تشکیل میں رکھا جائے تو یہ سوال کہ حرکت ف کی جانب ہوگی یا اس سے دور اُس تشکیل پر منحصر نہیں ہے جس میں نظام کو رکھا گیا ہے بلکہ $\left(\frac{جف^2 ک}{جف لا^2}\right)_ف$ کی علامت پر منحصر ہے۔

(۱۶۷) ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ف توازن کی تشکیل ہو اور اگر نظام کو ف سے خفیف طور پر کسی قریبی تشکیل میں ہٹایا جائے تو

(۱) اگر $\left(\frac{\text{جف}^2 \text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ مثبت ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ اپنے توازن کے ابتدائی محل پر لوٹے گا،

(ب) اگر $\left(\frac{\text{جف}^2 \text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ منفی ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ توازن کے محل سے اور دور حرکت کرے گا۔

قسم اول کے توازن کو **قائم توازن** اور قسم دوم کے توازن کو **غیر قائم توازن** کہتے ہیں۔

ہم نتائج کو حسب ذیل جدول میں خلاصہ کے طور پر بیان کر سکتے ہیں:

$\left(\frac{\text{جف}^2 \text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ کی علامت	توانائی بالقوہ ک	توازن
+	اقل	قائم
−	اعظم	غیر قائم

۱۶۹ — مسئلہ۔ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادلاً واقع ہوتے ہیں۔

ہم مان سکتے ہیں کہ صرف محدود قوتوں سے بحث کیجارہی ہے اور اس لیے تفاعل ک ہمیشہ محدود ہوگا، وہ کبھی بھی قیمتوں ک = ±∞ سے گذر نہیں سکتا۔ یہ تفاعل مسلسل ہونا چاہیئے کیونکہ بموجب فرض وہ کام جو نظام کو کسی تشکیل میں رکھنے میں انجام پاتا ہے محدود قیمت کا ہونا چاہیئے

اور اس لیے کسی دی ہوئی تشکیل کے لئے توانائی بالقوہ کی صرف ایک قیمت ہونی چاہیئے۔ نیز توانائی بالقوہ کے تفرقی سر محدود ہونے چاہئیں کیونکہ اِن سے اُن قوتوں (دفعہ ۱۳۳) کی پیمائش ہوتی ہے جو کسی دی ہوئی تشکیل میں صرف محدود قیمتیں رکھ سکتی ہیں۔

پس اگر تفاعل ک کی ترسیم کھینچی جائے تو وہ ایسے حصوں پر مشتمل ہونی چاہیے جنمیں ک متبادلاً بڑھے اور گھٹے۔ ایک حصہ سے جسمیں ک بڑھتا ہے اُس حصہ میں جسمیں ک گھٹتا ہے داخل ہونیکے لیے ہمیں ایک ایسے نقطہ میں سے گذرنا چاہیئے جس پر ک اعظم ہے۔ برخلاف ازیں اُس حصہ سے جس میں ک گھٹتا ہے اُس حصہ میں جس میں ک بڑھتا ہے
داخل ہونے کے لیے ایک ایسے نقطہ میں سے گذرنا پڑے گا جس پر (۱۰۸)
ک اقل ہے۔ اِس لیے ک کی اعظم اور اقل قیمتیں متبادلاً وقوع پذیر ہوتی ہیں یا دوسرے الفاظ میں قائم اور غیر قائم توازن کی تشکیلات متبادلاً واقع ہوتی ہیں۔

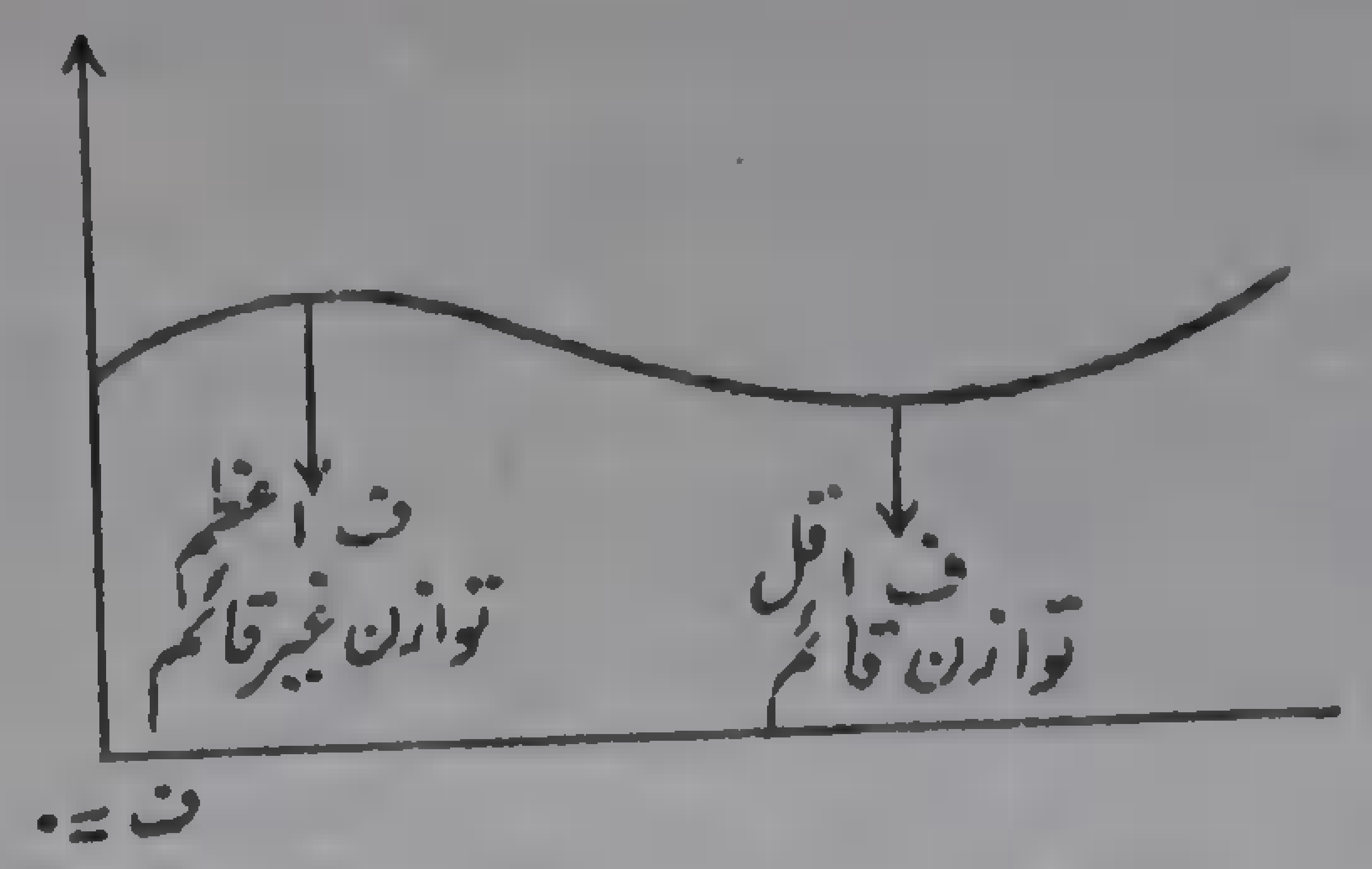
۱۵۰ ۔ توازن کی اِن دو قسموں کی مثالیں اُن تمثیلات میں مل سکتی ہیں جو قبل ازیں بیان ہو چکی ہیں۔

۱۔ حرّاکہ جو پٹریوں پر حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ کسی محل میں مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہے اور فرض کرو کہ لا سے وہ فاصلے تعبیر ہوتے ہیں جو راستہ پر اتفاقاً پیمائش کئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ انجن کی کُل کمیت ك ہے۔ تب توانائی بالقوہ ك ج ف ہے۔ تشکیل لا = ۰ میں توازن کے لیے شرط ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{ك ج ف}) = ۰$$

یا $\frac{\text{فرف}}{\text{فرلا}} = ۰$۔ جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ف کو اعظم ہونا چاہیئے یا اقل صفحہ ۲۵۵ کی

جدول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ف اقل ہے یعنی اگر مرکز ثقل اپنے زیر ترین نقطہ پر ہے تو توازن قائم ہوگا۔ اِس لیے اگر حراکہ کو اس محل سے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو وہ اِس محل پر واپس لوٹ آئے گا۔ اگر ف اعظم ہو یعنی اگر مرکز ثقل اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔ حراکہ اب پہاڑی کے چوٹی پر ہوگا اور چوٹی کے کسی ایک جانب ہٹانے پر پہاڑی کے نیچے لڑھکتا جائے گا۔



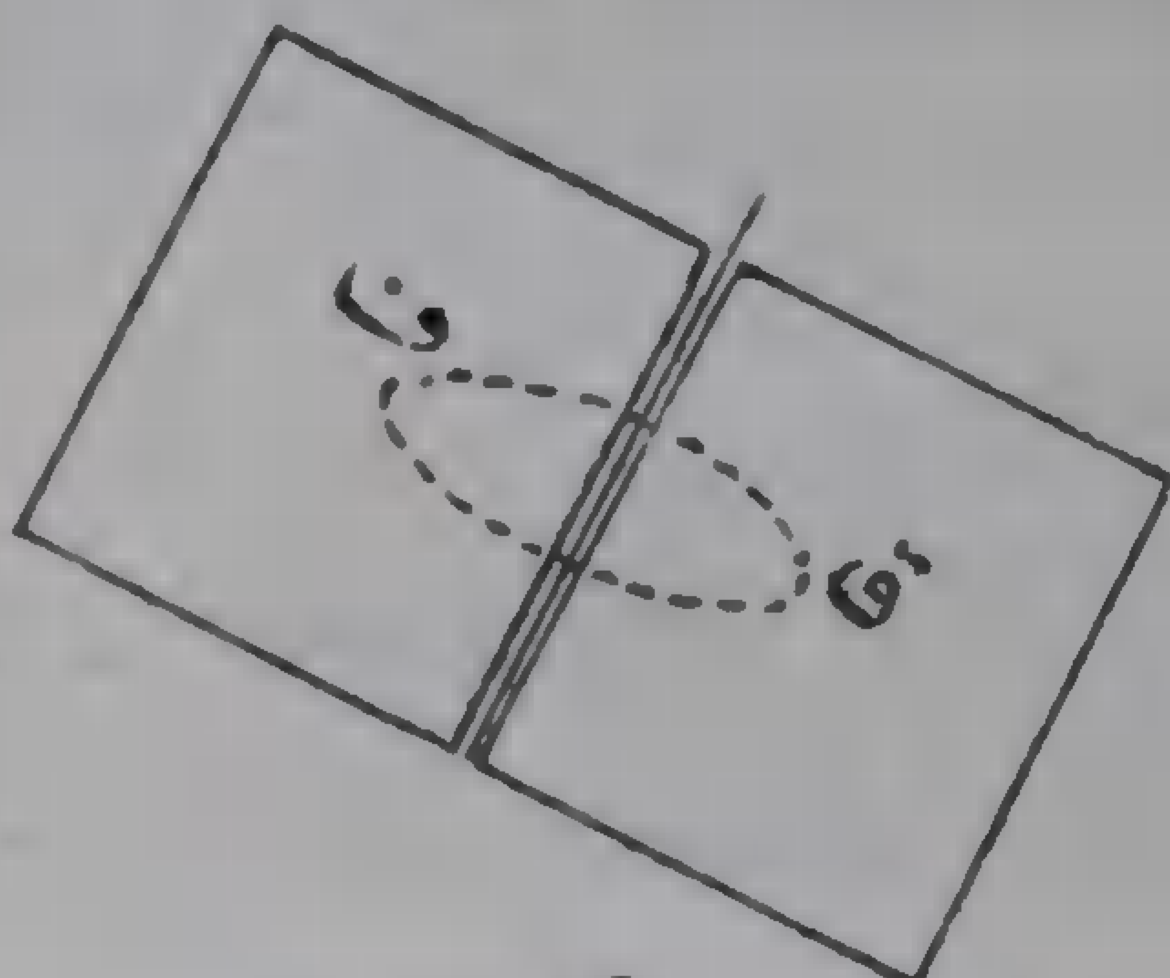
شکل (۹۷)

نوٹ ۔ اگر حراکہ کے متحرک اجزاء متناسب طور پر "متوازن" نہیں ہیں تو مرکز ثقل ممکن ہے ہمیشہ پٹریوں کے اوپر ایک ہی ارتفاع پر نہ رہے اور اس لیے ف کی اعظم اور اقل قیمتیں ضروری نہیں کہ اُن نقطوں پر واقع ہوں جہاں راستہ کی بلندی اعظم یا اقل ہے ۔ مثلاً توازن کا ایک محل وقوع پذیر ہو سکتا ہے جہاں راستہ ہموار نہ ہو یا نیز قائم توازن کا محل ایک ایسے نقطہ پر واقع ہو سکتا ہے جس پر راستہ اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو، ظاہر ہے کہ اس صورت میں پٹریوں کے اُوپر مرکز ثقل کا ارتفاع اِس نقطہ پر اقل ہے ۔ اس لیے اگر انجن کو راستہ کے زیر تر نقطہ تک خفیف طور پر ہٹایا جائے اور پھر آزاد چھوڑ دیا جائے تو وہ خود بلند ترین نقطہ تک واپس لوٹے گا ۔ یہاں اصول وہی ہے جو میکانیکی کھلونوں میں استعمال کیا جاتا ہے کیونکہ جب اِن کو کسی مائل مستوی کے پائین میں ساکن رکھا جاتا ہے تو وہ آزاد چھوڑنے پر مستوی کے اوپر لڑھکنا شروع کرتے ہیں ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادلاً واقع ہونے چاہئیں جیسا کہ ہم نے دفعہ ۱۴۹ میں ثابت کیا ہے ۔

۲ ــ دروازہ جو قبضوں پر گھومے ۔ یہاں بھی توانائی بالقوہ ث ج ف ہے

جس میں ف کسی معیاری ہموار مُستوی کے اوپر دروازے کے مرکز ثقل کا ارتفاع ہے
جب دروازہ اپنے قبضوں پر گھومتا ہے تو اِس کا مرکز ثقل قبضوں کے خط کے گرد
ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اگر یہ خط کامل طور پر انتصابی ہو تو مرکز ثقل سے
مرتسم شدہ دائرہ کُلاً ایک افقی مُستوی میں واقع ہوتا ہے اور اِس لیے دروازہ کا
ہر محل توازن کا محل ہوتا ہے اور قائمیت یا غیر قائمیت کا سوال پیدا ہی نہیں ہوتا
لیکن اگر قبضوں کا خط کامل طور پر انتصابی نہ ہو تو مذکورۂ بالا دائرہ ایک مائل مُستوی میں
واقع ہوگا۔ وہ نقطے جن پر مرکز ثقل کا ارتفاع معیاری افقی مُستوی کے اوپر اعظم یا
اقل ہے تعداد میں دو ہیں:

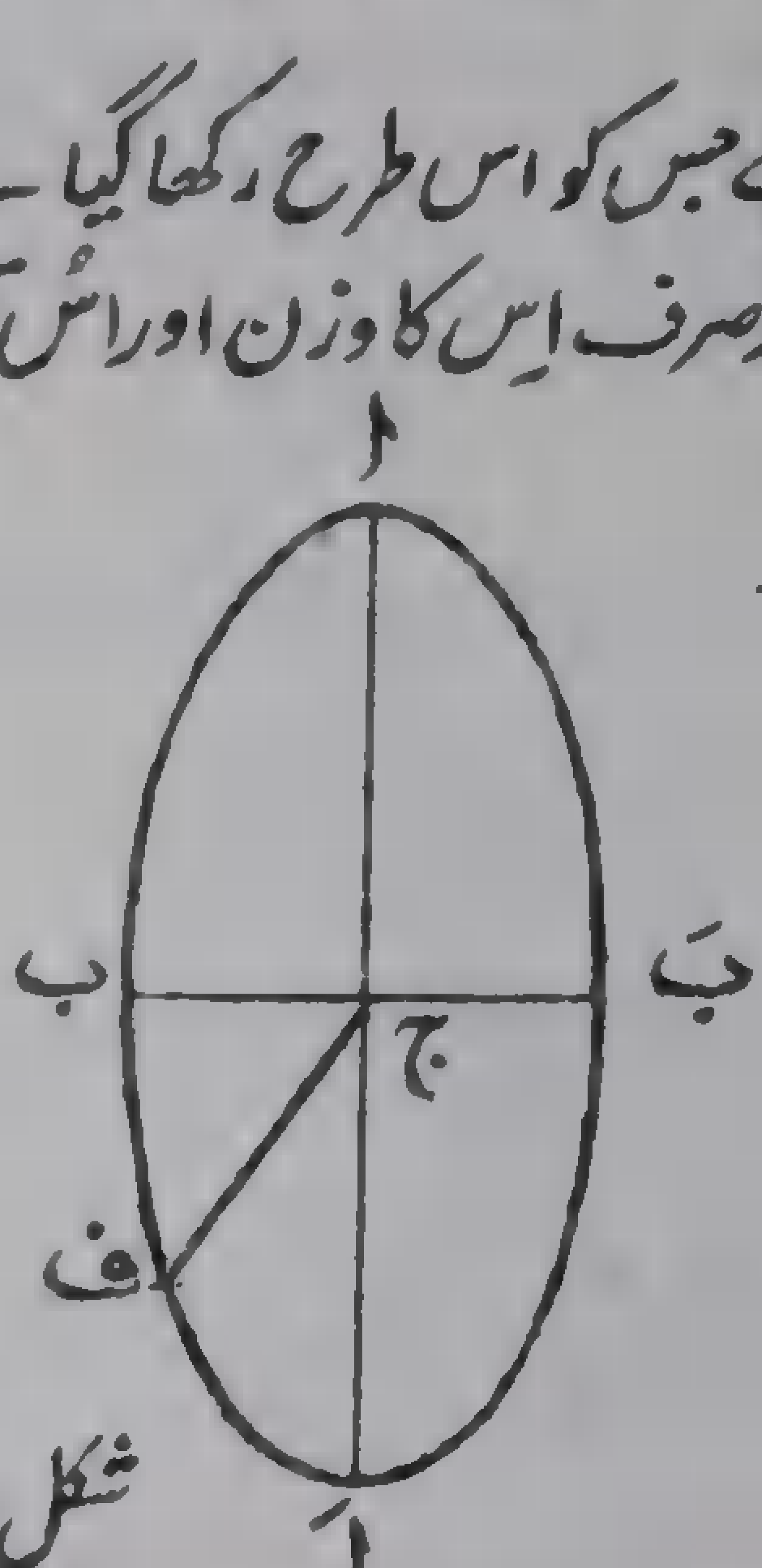


شکل (۹۸)

(۱) نقطہ ف جو دائرہ کا وہ بلند ترین نقطہ ہے جس پر توازن غیر قائم ہے۔

(۲) نقطہ ق جو دائرہ کا وہ زیریں ترین نقطہ ہے جس پر توازن قائم ہے۔

۳۔ **منکا جو تار پر پھسلے**۔ ایک معین مسئلہ حاصل کرنے کے لیے
فرض کرو کہ منکا ف ایک ناقصی تار پر پھسلتا ہے جس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اسکا
محور اعظم اُا انتصابی ہے۔ فرض کرو کہ منکے پر صرف اِس کا وزن اور اُس تنی ہوئی
ڈوری کا تناؤ عمل کرتے ہیں جس کا ایک سِرا منکے سے اور دوسرا سِرا ناقص کے مرکز سے بندھا ہے۔ فرض کرو کہ ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں اور فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل اور مقیاس لہ ہے جہاں ل، ب سے کم ہے اور اس لیے ڈوری ہمیشہ تنی ہوئی



شکل (۹۹)

رہتی ہے۔ فرض کرو کہ منکے کا وزن و ہے۔

پہلا کام کسی تشکیل میں توانائی بالقوہ کو محسوب کرنے کا ہے۔ فرض کرو کہ تشکیل کی تعیین ناقص پر کے اُس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ فہ سے ہوتی ہے جو منکا اختیار کرتا ہے۔ تب ناقص کے مرکز کے اوپر منکے کا ارتفاع ا جم فہ ہے اور اس لیے توانائی بالقوہ کا وہ حصہ جو تجاذبی قوتوں سے پیدا ہوتا ہے و ا جم فہ ہے۔ ڈوری کا طول ر مساوات

ر۲ = ا۲ جم۲ فہ + ب۲ جب۲ فہ (ا)

سے حاصل ہوتا ہے۔ وہ کام جو ڈوری کو طول ل سے طول ر تک تاننے میں انجام پاتا ہے حسب دفعہ (۱۱۴)

لہ/۲ل (ر - ل)۲

ہے۔ اِس کو توانائی بالقوہ کا وہ حصہ سمجھا جا سکتا ہے جو ڈوری کے تاننے سے پیدا ہوتا ہے۔ اِس لیے کُل توانائی بالقوہ ہوگی

ک = و ا جم فہ + لہ/۲ل (ر - ل)۲ (ب)

(۱۸۰) اب توازن کے محل، فرک/فرفہ = ۰ سے یا

و ا جب فہ - لہ/ل (ر - ل) فرر/فرفہ = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اِس میں مساوات (ا) سے ر کی قیمت درج کی جائے تو

و ا جب فہ + لہ/ل (ا۲ - ب۲) جب فہ جم فہ - لہ (ا۲ - ب۲) جب فہ جم فہ / √(ا۲ جم۲ فہ + ب۲ جب۲ فہ) = ۰

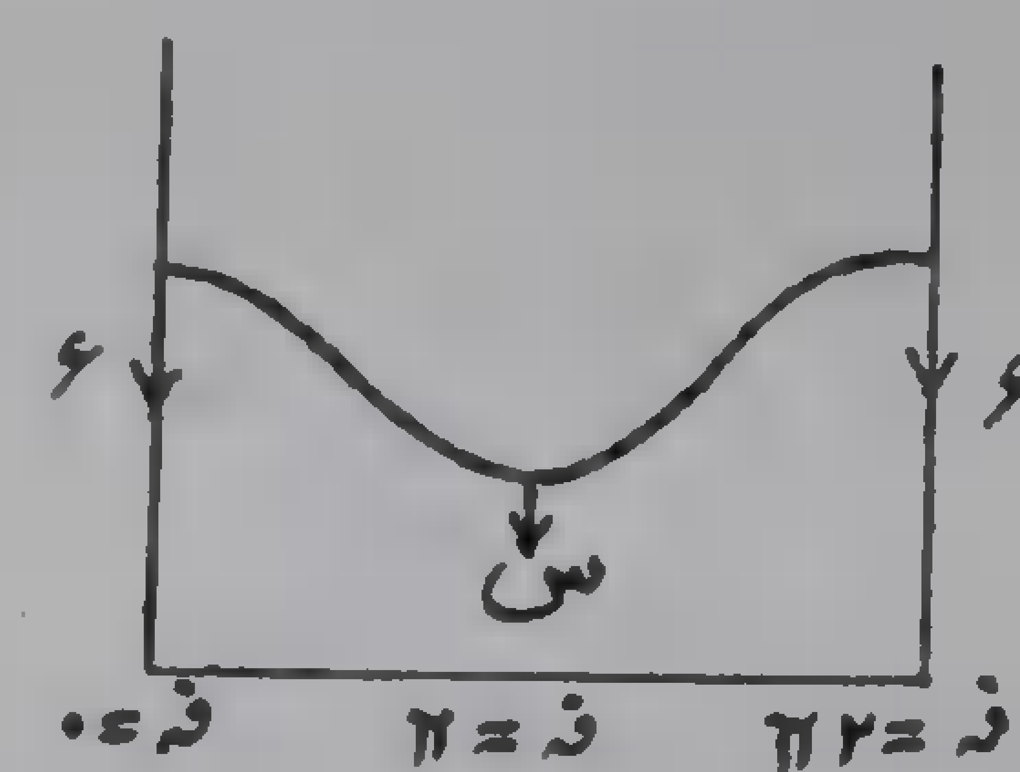
منطق بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اصلیں جب فہ = ۰ سے اور نیز

[و ا + لہ/ل (ا۲ - ب۲) جم فہ]۲ (ا۲ جم۲ فہ + ب۲ جب۲ فہ) - لہ۲ (ا۲ - ب۲)۲ جم۲ فہ = ۰

یعنے
$$\left[\text{و ا} + \frac{\text{لہ}}{\text{ل}}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم فہ}\right]^2 \left[(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\right] - \text{لہ}^2(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{جم}^2\,\text{فہ} = 0 \qquad (\text{ج})$$

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں آخری مساوات جم فہ میں چوتھے درجہ کی ہے۔ جب فہ = ۰ کی اصلیں فہ = ۰، π ہیں اور اس لیے ہمیشہ دو توازن کے محل ا، اَ پر ہیں جو محور اعظم کے سرے ہیں۔ مساوات (ج) چوتھے درجہ کی ہے اور اس لیے جم فہ میں اس کی حقیقی اصلوں کی تعداد ۰، ۲ یا ۴ ہو سکتی ہے۔ اِس مساوات کو ہم نے اُس مساوات کی طرفین کا مربع لیکر حاصل کیا ہے جو پوری ہونی چاہیئے تھی اور اس لیے ایسا کرنے سے ہم نے اصلی مساوات کی اصلوں کی تعداد کو دگنا کر دیا ہے۔ اس لیے جم فہ کی اصلی مساوات صرف ۰، ۱ یا ۲ حقیقی اصلوں سے پوری ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں ا اور اَ کے درمیان تار کی کسی ایک جانب زیادہ سے زیادہ توازن کے دو محل ہو سکتے ہیں۔

جم فہ کی اصلوں کی اصلی قیمتیں معلوم کرنا اور پھر ان اصلوں کے جواب میں $\frac{\text{فر}^2\text{ک}}{\text{فر لا}^2}$ کی قیمتوں کی علامتیں متعین کرنا ایک تکلیف دہ کام ہے۔ یہ سوال قائم اور غیر قائم تشکیلات کے عام نظریہ کو استعمال کرنے سے بہت سادہ ہو جاتا ہے۔



شکل (۱۰۰)

اگر ہم جملہ (ب) میں لہ = ۰ رکھیں تو اُس صورت میں جس میں لہ بمقابلہ و کے لاانتہا چھوٹا ہے حسب ذیل توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ک} = \text{و ا جم فہ}$$

اِس کی ترسیم شکل (۱۰۰) میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں توازن کے صرف دو محل ہیں یعنے فہ = ۰ اور فہ = π جس میں سے پہلا (۶) غیر قائم ہے اور دوسرا (س) قائم۔

(۱۸۱) نیز اگر ہم جملہ (ب) میں و = ۰ رکھیں تو اُس صورت میں جسمیں لہ بمقابلہ و کے

لا انتہا بڑا ہے تو توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے

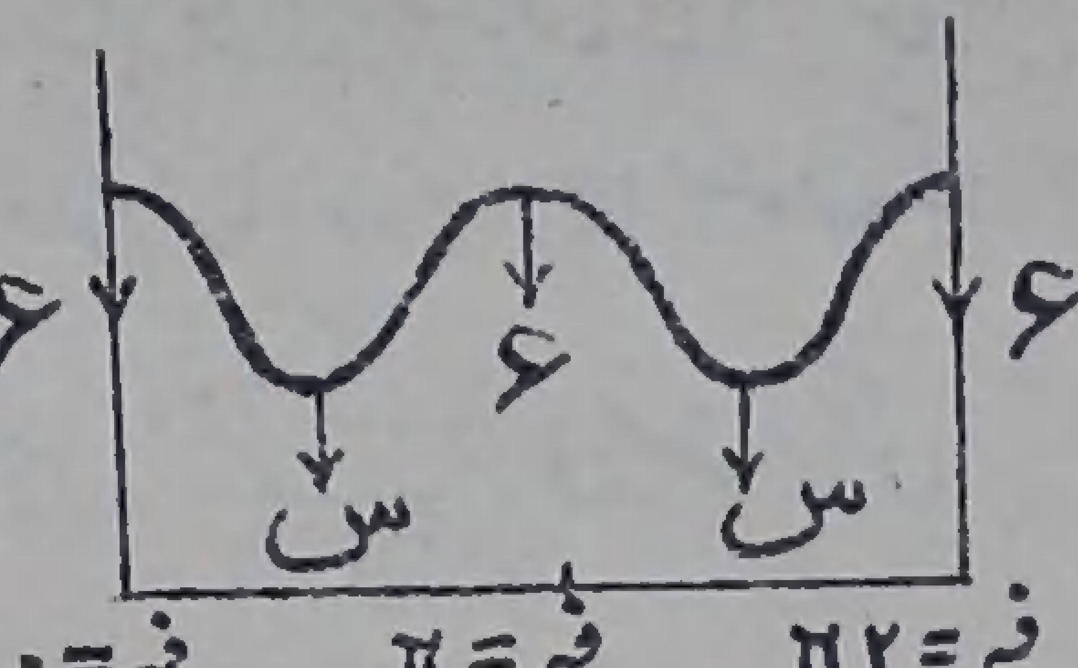
$$ک = \frac{لہ}{۲ل}(ر - ل)^{۲}$$

اور اس صورت میں ک کی ترسیم کو شکل (۱۰۱) میں دکھایا گیا ہے۔ توازن کے چار محل

$$فہ = ۰ ، \frac{\pi}{۲} ، \pi ، \frac{۳\pi}{۲}$$

ہیں جو علی الترتیب غیر قائم، قائم، غیر قائم، قائم ہیں۔

وہ عام صورت جس میں لہ، و کے ساتھ محدود نسبت رکھتا ہے متذکرہ صدر دو انتہائی صورتوں کے درمیان واقع ہے۔ عام صورت میں ک کی ترسیم اشکال (۱۰۰) اور (۱۰۱) کی ترسیموں کو مرکب کرنے سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ فہ کی کسی قیمت کے متناظر معین معلوم کرنے کے لیے ہم ترسیموں (۱۰۰) اور (۱۰۱) کے نظیری معینوں کو مناسب مستقلات سے ضرب دیتے ہیں اور جمع کرتے ہیں۔ ان دو معینوں سے جملہ (ب) کی دو قیمیں جداگانہ ملتی ہیں اور ان کا مجموعہ ک کی کل قیمت ہے۔



شکل (۱۰۱)

اس ہندسی عمل سے ظاہر ہے کہ تشکیل فہ = ۰ توازن کی غیر قائم تشکیل رہتی ہے۔ تشکیل فہ = π بھی توازن کی تشکیل ہے لیکن وہ قائم یا غیر قائم ہو سکتی ہے۔ ان دو تشکیلات کے درمیان توازن کی ایک اور تشکیل ہو سکتی ہے جیسا کہ شکل (۱۰۱) میں یا یہ کہ توازن کی کوئی تشکیل ہی نہ ہو جیسا کہ شکل (۱۰۰) میں۔ چونکہ دفعہ ۱۴۹ کی رو سے قائم اور غیر قائم تشکیلات متبادلاً واقع ہوتی ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ اگر تشکیل فہ = π قائم ہے تو اس کے اور فہ = ۰ کے درمیان کوئی اور توازن کی تشکیل نہیں ہو سکتی۔ لیکن اگر فہ = π غیر قائم ہے تو فہ = π اور فہ = ۰ کے درمیان توازن کی ایک تشکیل ہونی چاہیے اور یہ قائم ہونی چاہیے۔

اِس لیے تشکیل فہ = π کی قائمیت یا غیر قائمیت سے لہ کی کسی معلومہ قیمت کے لیے حل کی نوعیت معلوم ہوتی ہے۔ یہ قائمیت یا غیر قائمیت فہ = π پر (جف² ک / جف فہ²) کی علامت سے متعین ہوتی ہے۔ اب اِس کی علامت معلوم کرنے کے لیے فہ = π سے قریب π − فہ = طہ رکھو اور طہ² سے چھوٹی رقموں کو نظر انداز کرو تو اس تقرب تک

ر² = اُ² جم² فہ + ب² جب² فہ

= اُ² − (اُ² − ب²) جب² طہ

= اُ² − (اُ² − ب²) طہ²

اِس لیے مساوات (ب) سے

ک = و ا جم فہ + لہ / ۲ل (ر − ل)²

= − و ا (۱ − ½ طہ²) + لہ / ۲ل [ا(۱ − ½ (ا² − ب²) / ا² طہ²) − ل]²

(۱۸۲) اِس لیے جف² ک / جف طہ² = و ا − لہ (ا² − ب²)(ا − ل) / ا ل

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فہ = π پر توازن قائم ہے یا غیر قائم بموجب اس کے کہ

لہ < یا > و ا² ل / (ا² − ب²)(ا − ل)

خلاصہ یہ ہے کہ حسب ذیل دو صورتیں ہیں:

(۱) اگر لہ < و ا² ل / (ا² − ب²)(ا − ل) تو توازن کے محل صرف فہ = ۰ اور فہ = π ہیں جو علی الترتیب غیر قائم اور قائم ہیں۔

(۲) اگر لہ > و ا² ل / (ا² − ب²)(ا − ل) تو توازن کے محل فہ = ۰ اور

فہ = ۲۱ ہیں جو دو توں غیر قائم ہیں اور نیز ان کے درمیان توازن کا ایک قائم محل ہے۔ یہ آخری محل مساوات (ج) سے معلوم ہوگا۔

فاصل اور تعدیلی توازن

۱۵۱ ۔ اگر توازن کے محل پر $\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}$ صفر ہو تو توازن کو فاصل توازن کہتے ہیں۔ اب تک یہ بات منکشف نہیں ہوئی کہ جب کسی نظام کو فاصل توازن کے محل سے خفیف طور پر ہٹایا جاتا ہے تو کیا وقوع پذیر ہوتا ہے۔

توازن کے کسی محل کے قریب ک کی قیمت کو بالعموم شکل (دیکھو مساوات (۱۴))

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\,\text{لا}^{2}\left(\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}\right)_{\text{ف}} + \frac{1}{6}\,\text{لا}^{3}\left(\frac{\text{جف}^{3}\text{ک}}{\text{جف لا}^{3}}\right)_{\text{ف}}$$

$$+ \frac{1}{24}\,\text{لا}^{4}\left(\frac{\text{جف}^{4}\text{ک}}{\text{جف لا}^{4}}\right)_{\text{ف}} + \dots\dots\dots \quad (۴۳)$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

اگر $\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}$، ف پر معدوم ہو تو ک ۔ $\text{ک}_{\text{ف}}$ کی قیمت میں سب سے اہم رقم وہ ہے جس میں لا^{3} ہے اس لیے

$$\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}} = \frac{1}{6}\,\text{لا}^{3}\left(\frac{\text{جف}^{3}\text{ک}}{\text{جف لا}^{3}}\right)_{\text{ف}}$$

(۱۸۲) ک ۔ $\text{ک}_{\text{ف}}$ علامت بدلتا ہے جبکہ وہ لا = ۰ میں سے گزرتا ہے جو توازن کی تشکیل ہے اور اس لیے ک کی ترسیم شکل (۱۰۲) جیسی ہے جس میں ایک افقی مماس ہے اور نقطہ ف، انعطاف کا نقطہ ہے۔ ایک جانب توانائی بالقوہ ف پر کی توانائی بالقوہ سے کم ہے اور دوسری جانب زیادہ۔

فرض کرو کہ ف کی ان دو جانبوں پر دو متصلہ تشکیلات ق، قَ ہیں۔ اگر نظام کو ق پر رکھا جائے تو اسے اس طرح حرکت کرنا چاہیے کہ توانائی بالقوہ گھٹے اور اس لیے اس کو ف سے دور حرکت کرنا چاہیئے۔ اگر نظام کو قَ پر

رکھا جائے تو اُس کو اسی سبب سے اولاً ف کی جانب حرکت کرنا چاہیے لیکن وہ ف سے گذر کر پرے حرکت کرے گا اور ف سے پرے حرکت کرنا جاری رکھے گا کیونکہ وہ ساکن نہیں ہو سکتا تاآنکہ اس کی توانائی بالقوہ پھر قَ پر کی توانائی بالقوہ کے مساوی نہ ہو جائے اور یہ ف کے قریب واقع نہیں ہو سکتا ۔ اِس لیے اگر نظام ف سے قریب کسی محل سے چلے تو وہ بالآخر ف سے دُور حرکت کرنے لگے گا۔ دوسرے الفاظ میں توازن غیر قائم ہے۔

پس اگر ف پر $\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2} = 0$. تو توازن بالعموم غیر قائم ہوتا ہے۔

لیکن وہ صورت مستثنیٰ ہوگی جبکہ $\frac{\text{جف}^3\text{ک}}{\text{جف لا}^3} = 0$. کیونکہ اس صورت میں

$$\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}} = \frac{1}{24}\,\text{لا}^4\left(\frac{\text{جف}^4\text{ک}}{\text{جف لا}^4}\right)_{\text{ف}}$$

اِس صورت پر حسب دفعہ ۱۴۸ بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اِس کے کہ $\left(\frac{\text{جف}^4\text{ک}}{\text{جف لا}^4}\right)_{\text{ف}}$ مثبت یا منفی ہو۔

۱۵۲ — اس سے اعلیٰ تر درجوں کی نادر صورتوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ ہمیں حسب ذیل عام قاعدے حاصل ہوتے ہیں :

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سر جو معدوم نہیں ہوتا طاق رتبہ کا ہے تو توازن غیر قائم ہوتا ہے۔

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سر جو معدوم نہیں ہوتا جفت رتبہ کا ہے تو توازن قائم یا غیر قائم ہوتا ہے بموجب اسکے کہ اِس کی علامت مثبت یا منفی ہے۔